MÉCANIQUE GÉNÉRALE. — *Liaisons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques*. Note (*) de **Jean Jacques Moreau,** présentée par Paul Germain.

On introduit le concept de choc inélastique standard, conduisant à une formulation très cohérente pour la dynamique d'un système à liaisons unilatérales sans frottement.

GENERAL MECHANICS. — Frictionless Unilateral Constraints and Inelastic Shocks.

The concept of a standard inelastic shock is introduced; this leads to some very consistent formulation for the dynamics of a system with frictionless unilateral constraints.

1. Mouvements sans chocs. — Soit un système mécanique sans frottement, de liberté finie; pour alléger, on se limite ici au cas où le formalisme de la dynamique analytique permet de l'identifier à un point de masse unité dans un espace vectoriel euclidien E, de dimention n. Pour tout intervalle de temps sans choc, les équations de Lagrange de ce point, soumis à l'effort total $F \in E$, se réduisent à $\ddot{x} = F$. On suppose que F s'exprime comme la somme des termes suivants :

1° Une loi d'effort donnée, continue par rapport à la configuration, soit $x \mapsto Q(x) \in E$.

2° Les *réactions* $R_\alpha \in E$, $\alpha \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, de *liaisons unilatérales* astreignant le point mobile à demeurer dans la région fermée L de E définie par ν inégalités $f_\alpha(x) \geqq 0$; les ν fonctions f_α sont $\mathscr{C}^1$, de gradient non nul.

Ces liaisons unilatérales sont supposées *sans frottement*, i. e. $R_\alpha = \lambda_\alpha \operatorname{grad} f_\alpha(x)$ avec $\lambda_\alpha \geqq 0$ et $\lambda_\alpha f_\alpha(x) = 0$.

Pour tout $x \in L$, notons $\Gamma(x) = \{\alpha \in \{1, 2, \ldots, \nu\} : f_\alpha(x) = 0\}$. Alors un $R \in E$ est une valeur réalisable de la somme ΣR_α pour une configuration x donnée si et seulement si R appartient au cône convexe $N(x)$ engendré par les $\operatorname{grad} f_\alpha(x)$, $\alpha \in \Gamma(x)$ (conventionnellement réduit au zéro de E si $\Gamma(x) = \emptyset$) : c'est le *cône normal entrant* au point x de la région L.

Un mouvement sans choc $t \mapsto x(t) \in L$ sur un intervalle de temps I est donc dynamiquement admissible si et seulement si :

$$\ddot{x} - Q(x) \in N(x), \tag{1}$$

inclusion différentielle, entendue dans le sens usuel suivant : on demande que la dérivée première $t \mapsto \dot{x}(t)$ soit absolument continue, d'où, pour presque tout t, l'existence de la dérivée seconde $\ddot{x}(t)$, astreinte à vérifier (1). Nous allons voir qu'alors une relation un peu plus forte en découle.

2. Cône tangent en un point de L. — Si $x(t) \in L$ pour tout t, il vient immédiatement que, à tout instant t tel que la *vitesse à droite* $\dot{x}^+(t)$ existe, cet élément de E appartient à $V(x(t))$, *cône tangent* au point considéré de L, i. e.

$$V(x) = \{v \in E : \forall \alpha \in \Gamma(x),\ v \,.\, \operatorname{grad} f_\alpha(x) \geqq 0\} \tag{2}$$

(en particulier $V(x) = E$ si $\Gamma(x) = \emptyset$). Au sens du produit scalaire de E, noté ici ., $V(x)$ est le *cône polaire* de $-N(x)$. Symétriquement, si la *vitesse à gauche* $\dot{x}^-(t)$ existe, elle appartient à $-V(x(t))$.

Pour toute partie convexe fermée C de E, notons $v \mapsto \psi(C, v)$ sa fonction indicatrice, i. e. $\psi(C, v) = 0$ si $v \in C$ et $+\infty$ sinon. Le sous-différentiel $\partial\psi(C, v)$ constitue, en un sens classique, le cône normal sortant au point v de C.

Dans les hypothèses du paragraphe précédent, si t est intérieur à I, la vitesse $\dot{x}(t)=\dot{x}^+(t)=\dot{x}^-(t)$ existe, donc appartient à l'espace vectoriel $V(x(t)) \cap -V(x(t))$, orthogonal à $N(x(t))$. Pour un tel t, (1) implique alors que les éléments $-\ddot{x}+Q(x)$ et $\dot{x}$ sont conjugués par rapport au couple de fonctions convexes duales $\psi(-N(x), .)$ et $\psi(V(x), .)$, i.e.

$$-\ddot{x}+Q(x) \in \partial\psi(V(x), \dot{x}), \tag{3}$$

(écriture à laquelle on peut donner, si l'on veut, la forme d'une inéquation quasi variationnelle).

Observer pour les mouvements ci-dessus, par hypothèse sans choc sur l'intervalle de temps concerné, le même caractère de *réversibilité du temps* que dans le cas classique des systèmes à liaisons bilatérales sans frottement. Au second membre de (3) on pourrait aussi bien écrire $-\partial\psi(-V(x), \dot{x})$. L'orthogonalité de la vitesse $\dot{x}$, lorsqu'elle existe, à l'ensemble $N(x)$ entraîne l'habituelle équation de l'énergie (parce que les f_α ont été supposées indépendantes de t).

3. Choc inélastique standard. — Si un mouvement du type précédent s'achève à un instant t_c pour lequel la vitesse à gauche $\dot{x}^-(t_c)$, notée $\dot{x}_c^-$, n'appartient pas à $V(x_c)$, $x_c=x(t_c)$ l'éventualité d'un choc ne peut être esquivée. Classiquement, l'intégration de l'équation de la dynamique $\ddot{x}=F$ sur la durée « infiniment petite » du choc fournit, pour la vitesse de fin de choc $\dot{x}_c^+$

$$\dot{x}_c^+ - \dot{x}_c^- = P. \tag{4}$$

La *percussion de liaison* P, intégrale d'une réaction R « infiniment grande » supposée appartenir pendant toute cette durée au même cône convexe $N(x_c)$ (pour une discussion de ce type d'argument, *cf.* [1], § 9.7 *c*, remarque) vérifie elle-même :

$$P \in N(x_c), \tag{5}$$

à quoi il faut adjoindre, comme précédemment, la condition cinématique :

$$\dot{x}_c^+ \in V(x_c). \tag{6}$$

Même dans le cas simple où $\Gamma(x_c)$ se réduit à un seul élément, il est classique que les conditions (4), (5), (6), avec x_c et $\dot{x}_c^-$ supposés connus, ne suffisent pas à déterminer $\dot{x}_c^+$. Le choc est usuellement dit *élastique* si l'énergie cinétique est conservée, c'est-à-dire $|\dot{x}_c^+| = |\dot{x}_c^-|$, où on note $|.|$ la norme de E; pour $\Gamma(x_c)=\{1\}$, cela fournit immédiatement la visualisation du choc comme une réflexion du vecteur vitesse sur l'hyperplan tangent au point x_c à l'hypersurface $f_1=0$. Au contraire, toujours avec $\Gamma(x_c)=\{1\}$, on dit que le choc est *mou* si $\operatorname{grad} f_1(x_c) . \dot{x}_c^+ = 0$. Nous proposons ci-dessous une généralisation de cette dernière situation.

Pour tout ensemble convexe fermé non vide C dans E et tout $z \in E$, on note $\operatorname{prox}(C, z)$ le *point proximal* de z dans C. La définition qui suit vaut aussi bien pour un système à variété de configuration quelconque : E sera l'espace vectoriel tangent au point x_c de cette variété, muni de la *métrique euclidienne associée à l'expression locale de l'énergie cinétique* et par là identifié à son dual.

DÉFINITION. — *Le choc sera dit inélastique standard si les conditions suivantes, équivalentes moyennant* (4), (5), (6), *sont vérifiées :*

$$\dot{x}_c^+ = \operatorname{prox}(\mathrm{V}(x_c), \dot{x}_c^-) \tag{7}$$

$$\mathrm{P} = \operatorname{prox}(\mathrm{N}(x_c), -\dot{x}_c^-) \tag{8}$$

$$\mathrm{P}.\dot{x}_c^+ = 0. \tag{9}$$

L'équivalence résulte immédiatement du *théorème des deux cônes* [2] : Si A et B sont deux cônes mutuellement polaires d'un espace hilbertien réel, les conditions (i) et (ii) suivantes sont équivalentes : (i) $x = \operatorname{prox}(\mathrm{A}, z)$, $y = \operatorname{prox}(\mathrm{B}, z)$; (*ii*) $z = x + y$, $x \in \mathrm{A}$, $y \in \mathrm{B}$, $x.y = 0$.

La condition (7) a l'aspect sécurisant d'un principe d'économie : parmi toutes les valeurs de $\dot{x}_c^+$ cinématiquement compatibles avec le respect de $x(t) \in \mathrm{L}$, (7) impose celle qui est la plus proche de la vitesse avant choc $\dot{x}_c^-$.

Par ailleurs, on peut interpréter l'élément $-\dot{x}_c$ comme la percussion qu'il faudrait appliquer au système pour amener sa vitesse à zéro. Alors (8) exprime que P, dans l'ensemble $\mathrm{N}(x_c)$ des valeurs qui lui sont permises par la loi des contacts unilatéraux sans frottement, est le point le plus proche de cette percussion d'arrêt.

Enfin la condition (9) a pour conséquence le caractère *dissipatif* du choc, puisqu'elle équivaut à :

$$\frac{1}{2}|\dot{x}_c^+|^2 - \frac{1}{2}|\dot{x}_c^-|^2 = -\frac{1}{2}|\dot{x}_c^- - \dot{x}_c^+|^2. \tag{10}$$

Noter que (9) est vérifiée en particulier si la vitesse de fin de choc est cinématiquement compatible avec la persistance de tous les contacts $f_\alpha = 0$ effectifs à l'instant t_c, i.e. $\dot{x}_c^+ \in \mathrm{V}(x_c) \cap -\mathrm{V}(x_c)$. Ainsi (10) généralise un théorème classique de Carnot ([1], [3]).

Observer que, le cône $\mathrm{V}(x_c)$ étant fixé, l'application $\dot{x}_c^- \mapsto -\mathrm{P}$ a formellement l'aspect d'une relation entre une vitesse et une force, du type aujourd'hui appelé *processus dissipatif standard*, i.e. cette application est le gradient d'une fonction convexe, à savoir ici $v \mapsto (\operatorname{dist}(v, \mathrm{V}_c))^2/2$.

4. FORMULATION SYNTHÉTIQUE DU PROBLÈME D'ÉVOLUTION. — Rappelons qu'à toute application *à variation localement bornée*, soit u, d'un intervalle réel I dans un espace de Banach E (ici de dimension finie et euclidien) s'associe une mesure du sur I, à valeur dans E, dite *mesure différentielle* de u. Cela permet d'écrire sous un aspect différentiel les équations de certains processus éventuellement discontinus (*cf.* [4] où l'importance à cet égard de la continuité à droite pour la fonction u est expliquée).

On considère ici un intervalle I contenant son origine t_0; on *cherche* $u : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ *à variation localement bornée, continue à droite, telle qu'en posant :*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau,$$

($x_0 \in \mathrm{L}$ donné) *on ait, avec* $u(t_0) = u_0$ (donné dans $\mathrm{V}(x_0)$),

$$-du + \mathrm{Q}(x(t))\, dt \in \partial\psi(\mathrm{V}(x(t)), u(t)) \tag{11}$$

dans le sens suivant : *Il existe une mesure réelle* $d\mu \geqq 0$ *sur* I *par rapport à laquelle les mesures* dt (*mesure de Lebesgue de* I) *et* du *possédent des densités respectives* $t' \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{I}, d\mu; \mathbb{R})$ *et*

$u' \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{I}, d\mu; \mathrm{E})$ *telles que* $-u'(t)+\mathrm{Q}(x(t))\,t'(t)$ *appartienne pour tout* $t \in \mathrm{I}$ *à l'ensemble écrit au second membre de* (11). Le choix de la mesure $d\mu$ n'est certainement pas unique; le fait que le second membre en question est un cône rend la propriété indépendante de ce choix [4]. Moyennant la convention $\mathrm{V}(x)=\emptyset$ si $x \notin \mathrm{L}$, la condition $x(t) \in \mathrm{L}$ est comprise dans (11).

Visiblement, sur tout sous-intervalle de I où une solution u se trouverait absolument continue, la fonction $t \mapsto x(t)$ correspondante vérifiera (3). Par ailleurs, en tout point de discontinuité éventuel, soit t_c, de la fonction u, la mesure du présente un atome égal à $u(t_c)-u^-(t_c)$; dans ce cas (11) entraîne immédiatement la propriété caractéristique (7) d'un choc inélastique standard.

L'existence de solutions de ce problème, avec unicité éventuelle, est une question ouverte. On notera que le processus dissipatif ainsi décrit est essentiellement différent des évolutions avec conservation de l'énergie étudiées par M. Schatzmann [5].

(*) Remise le 9 mai 1983.

[1] J. J. Moreau, *Mécanique classique*, II, Masson, Paris, 1971.

[2] J. J. Moreau, *Comptes rendus*, 255, 1962, p. 238.

[3] C. W. Kilmister et J. E. Reeve, *Rational mechanics*, Longmans, London, 1966.

[4] J. J. Moreau, *Comptes rendus*, 282, série A, 1976, p. A 837.

[5] M. Schatzmann, *J. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl.* 2, 1978, p. 355-373; résumé dans : *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 603.

Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 34060 *Montpellier Cedex*.