Formulation dynamique d'un modèle de zone cohésive tridimensionnel couplant endommagement et frottement

Dynamical formulation of three-dimensional cohesive zone model coupling damage and friction

Yann Monerie — Vincent Acary

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (CNRS - UPR7051)
31, chemin Joseph Aiguier
F-13402 Marseille Cedex 20

monerie@lma.cnrs-mrs.fr

RÉSUMÉ. *Nous présentons dans ce papier un modèle de zone cohésive tridimensionnel couplant endommagement surfacique, frottement de Coulomb et contact unilatéral. Ce modèle permet la simulation de la fissuration des solides ainsi que celle des interfaces qui les lient. La formulation thermodynamique de ce modèle est donnée. Une attention particulière est portée aux problèmes de solutions à sauts inhérents aux modèles de comportement surfacique adoucissant : une formulation dynamique permet de s'affranchir de cette difficulté. Un cadre mathématique et numérique adéquat est utilisé pour la résolution des problèmes dynamiques en présence de contraintes unilatérales. La pertinence de l'outil numérique associé est soulignée sur un exemple de fissuration par flambement d'une plaque.*

ABSTRACT. *We propose in this paper a three-dimensional cohesive zone model, coupling surfacic damage, Coulomb friction and unilateral contact. This model is devoted to the fracture of solids and to the debonding of interfaces. The thermodynamical formulation of the model is given. We focus our attention on the jumps of solution, which could appear with such softening surfacic models. A dynamical formulation allows to overcome these problems of nonsmooth solutions. A particular mathematical and numerical framework is used to solve dynamical problems submitted to unilateral constraints. The ability of the associated numerical tool is underlined on a buckling-driven fracture of a square plate.*

MOTS-CLÉS : *Formulation dynamique, 3D, zone cohésive, endommagement, frottement, contact, éléments finis*

KEYWORDS: *Dynamical formulation, 3D, cohesive zone model, damage, friction, contact, finite elements*

1. Introduction

La modélisation et la simulation de la fissuration des matériaux sont des questions délicates dès lors que l'on sort du cadre de la propagation stationnaire des fissures dans les solides élastiques homogènes isotropes. Le modèle classique de la mécanique de la rupture révèle notamment certaines faiblesses qui limitent son utilisation dans des situations mécaniques plus complexes. De nombreux travaux ont été réalisés pour pallier quelques unes de ces faiblesses. Ces travaux ont eux aussi leurs limitations. On retiendra pour l'essentiel qu'ils ne permettent pas — soit sur le plan théorique, soit à des coûts numériques abordables — la simulation d'un processus de fissuration complet : de l'amorçage des fissures jusqu'à leur propagation éventuellement instable.

Les modèles de zone cohésive que nous mettons en œuvre ici permettent de conserver les paramètres énergétiques mis en évidence par la mécanique de la rupture (notamment le taux de restitution de l'énergie G) et de simuler des processus de fissuration complexes. La notion de zone cohésive offre de remarquables perspectives dans le domaine de l'analyse mécanique des amorçages et des propagations de fissures([XU 94, COS 97, NEE 99]). Elle permet d'envisager des situations mécaniques très complexes (matériaux multiphases, mixité globale et locale des modes de sollicitation, fissuration tridimensionnelle, évolutions dynamiques instables, prise en compte de contact et de frottement sur les lèvres de la fissure), tout en conservant une compréhension fine de la physique à l'échelle locale. L'évolution de la fissuration est décrite grâce à des critères locaux, souvent énergétiques, et en termes de relation entre la contrainte appliquée sur les lèvres de la fissure σ et la discontinuité de déplacement $[\mathbf{u}] = u^+ - u^-$ où u^+ et u^- sont les déplacements respectifs de chaque lèvre de la fissure. L'amorçage de la fissuration résulte alors naturellement du trajet de chargement et les champs cinématiques et sthéniques sont connus en chaque point de la structure.

La mise en œuvre numérique de ces modèles révèle cependant l'apparition de solutions à saut. Ces solutions peuvent être régularisées soit par l'introduction d'une viscosité des décohésions interfaciales, soit par une prise en compte d'effets non locaux, soit encore par celle des effets d'inertie. La première hypothèse n'est pas toujours confirmée expérimentalement selon la classe de matériaux envisagée et la seconde nécessite l'introduction de longueurs caractéristiques qu'il n'est pas toujours aisé de calibrer. Nous proposons ainsi une formulation dynamique des modèles de zone cohésive pour la fissuration. Les modèles envisagés proposent un couplage entre endommagement surfacique, frottement de Coulomb et contact unilatéral. Ces modèles sont étendus au cas de la fissuration tridimensionnelle dynamique. L'outil numérique associé est présenté sur un exemple de fissuration par flambement d'une plaque carrée.

2. Un modèle de zone cohésive couplant endommagement, frottement et contact unilatéral

Le modèle présenté ici décrit l'évolution d'une interface entre deux corps déformables initialement adhérents [CAN 96, RAO 97, RAO 99]. Il propose une transition d'un état non endommagé à un état frottant dans le plan tangent de l'interface (frottement de Coulomb) et à un état de contact unilatéral dans la direction normale à l'interface (pas d'interpénétration des solides).

Une idée fondamentale de ce modèle est d'introduire une variable d'état supplémentaire pour décrire l'état du contact. Cette variable, notée β et initialement introduite dans [FRé 82], permet de distinguer un contact frottant classique d'un contact adhésif. Elle traduit la proportion de liaisons adhésives actives entre les deux corps en contact : $\beta = 1$ l'interface est vierge, $0 < \beta < 1$ l'interface est partiellement endommagée, $\beta = 0$ l'interface est rompue. Cette variable peut aussi être considérée à juste titre comme une variable d'*endommagement surfacique* (avec $D_S = 1 - \beta$).

2.1. *Formulation thermodynamique*

Pour $\alpha = 1, 2$, soient deux corps déformables $\Omega^\alpha \subset \mathbb{R}^m$ ($m = 2, 3$) de frontières suffisamment régulières $\partial\Omega^\alpha$ soumis à des forces volumiques f^α et surfaciques F^α. On distingue sur $\partial\Omega^\alpha$ trois parties disjointes : Γ_c^α la zone potentielle de contact entre Ω^α et l'extérieur, $\partial\Omega_U^\alpha$ la zone d'application des déplacements et $\partial\Omega_F^\alpha$ la zone d'application des forces, avec $\partial\Omega^\alpha = \overline{\Gamma_c^\alpha} \cup \overline{\partial\Omega_U^\alpha} \cup \overline{\partial\Omega_F^\alpha}$. L'hypothèse des petites perturbations, permet de définir la *zone potentielle de contact* entre les deux solides : $\Gamma_c \simeq \Gamma_c^1 \simeq \Gamma_c^2$ et sa normale $n(x) \simeq n^1(x) \simeq -n^2(x)$ ($n^{\alpha(x)}$ est la normale extérieure sortante au solide Ω^α). On note $u = \{u^1, u^2\}$ le champ des déplacements dans $\Omega^1 \cup \Omega^2$ et $[u] = u^2 - u^1$ le saut de déplacement à l'interface Γ_c. Les forces intérieures duales à ces variables cinématiques sont : $\sigma = \{\sigma^1, \sigma^2\}$ le champs des contraintes dans $\Omega^1 \cup \Omega^2$ et R la force de contact sur Γ_c.

Les variables d'état du modèle sont : la déformation des solides ε, les déplacements normaux et tangentiels u_{N} et u_{T} ($[u] = u_{\mathrm{N}} n + u_{\mathrm{T}}$ avec $u_{\mathrm{N}} = [u]{\cdot}n$) et l'intensité d'adhérence β. Les variables thermodynamiques associées sont respectivement σ^r, R_{N}^r, R_{T}^r et $-G_\beta$ (les exposants $(.)^r$ et $(.)^{ir}$ indiquent les parties réversibles et irréversibles). L'utilisation des deux principes de la thermodynamiques conduisent, pour une évolution isotherme, aux inégalités de Clausius-Duhem volumique (sur Ω) et surfacique (sur Γ_c). Les solides sont considérés élastiques et isotropes. Leur comportement thermodynamique est décrit par un potentiel classique d'élasticité (tenseurs de rigidité A^1 et A^2). Par la suite, seul le comportement de la zone cohésive est précisé. La forme locale de l'inégalité de Clausius-Duhem sur Γ_c est donnée par l'équation (1) où Ψ_S est le potentiel surfacique d'énergie libre de Helmholtz.

$$\dot{\Psi}_S \leq R_{\mathrm{N}} \dot{u}_{\mathrm{N}} + R_{\mathrm{T}} \cdot \dot{u}_{\mathrm{T}} \quad \text{sur } \Gamma_c. \tag{1}$$

Les lois d'état sont données par le système d'inclusions différentielles (2) (où ∂_x indique la sous-différentiation par rapport à x).

$$\left\{ \begin{array}{rcl} R_{\mathrm{N}}^r & \in & \partial_{u_{\mathrm{N}}} \Psi_S(u_{\mathrm{N}}, u_{\mathrm{T}}, \beta), \\ R_{\mathrm{T}}^r & \in & \partial_{u_{\mathrm{T}}} \Psi_S(u_{\mathrm{N}}, u_{\mathrm{T}}, \beta), \\ -G_\beta & \in & \partial_\beta \Psi_S(u_{\mathrm{N}}, u_{\mathrm{T}}, \beta), \end{array} \right. \qquad \text{sur} \quad \Gamma_c. \tag{2}$$

Le choix spécifique (3) d'un potentiel Ψ_S permet notamment d'aboutir aux conditions de Signorini généralisées (6) où la condition $u_{\text{N}} \geq 0$ interdit toute interpénétration des solides. Ce choix permet aussi d'introduire en traction et/ou en cisaillement, une force de résistance supplémentaire qui s'oppose à la séparation des solides. Cette force évolue avec β.

$$\Psi_S(u_{\text{N}}, u_{\text{T}}, \beta) \quad = \quad \frac{\beta^2 C_{\text{N}}}{2}\, u_{\text{N}}^2 + \frac{\beta^2 C_{\text{T}}}{2}\, \|u_{\text{T}}\|^2 - w\, g(\beta) + I_{\mathbb{R}^+}(u_{\text{N}}) + I_{[0,\,1]}(\beta), \tag{3}$$

où I_X est la fonction indicatrice de l'ensemble X, C_{N} et C_{T} sont les raideurs initiales normale et tangentielle de la liaison interfaciale (en MPa/m), w est une énergie de référence à partir de laquelle est défini le seuil d'évolution de la variable d'adhésion β (en J/m^2) et $g(\beta)$ est une fonction donnée. Les seuls mécanismes dissipatifs envisagés à l'interface sont le frottement et l'endommagement des liaisons adhésives. La positivité de la dissipation surfacique est assurée par le choix d'un pseudo-potentiel de dissipation Φ_S convexe en $(\dot{u}_{\text{T}},\, \dot{\beta})$ et nul en $(0,\, 0)$. Ce choix est donné par l'équation (4) (on note $\chi_{\text{N}} = \{R^r_{\text{N}},\, u_{\text{N}},\, \beta\}$). La fonction indicatrice $I_{\mathbb{R}^-}(\dot{\beta})$ assure l'irréversibilité de la décohésion interfaciale.

$$\Phi_S\left(\dot{u}_{\text{T}},\, \dot{\beta};\, \chi_{\text{N}}\right) = \mu \left|R^r_{\text{N}} - \beta^2 C_{\text{N}} u_{\text{N}}\right| \|\dot{u}_{\text{T}}\| + \frac{b|\dot{\beta}|^{p+1}}{p+1} + I_{\mathbb{R}^-}(\dot{\beta}), \tag{4}$$

où μ le coefficient de frottement de Coulomb (sans dimension), b un coefficient de viscosité pour l'évolution de l'endommagement interfacial (en Ns/m) et $0 \leq p \leq 1$ une puissance intervenant dans la loi d'évolution de l'endommagement interfacial (sans dimension). Les lois complémentaires s'écrivent ainsi sur Γ_c :

$$R^{ir}_{\text{N}} = 0, \quad Rt^{ir} \in \partial_{\dot{u}_{\text{T}}} \Phi_S(\dot{u}_{\text{T}},\, \dot{\beta};\, \chi_{\text{N}}), \quad G_\beta \in \partial_{\dot{\beta}} \Phi_S(\dot{u}_{\text{T}},\, \dot{\beta};\, \chi_{\text{N}}). \tag{5}$$

2.2. *Le modèle adhésif/frottant*

La première égalité de (5) conduit à l'écriture de la loi de contact unilatéral avec adhérence (6). L'explicitation des sous-différentiels $\partial_{\dot{u}_{\text{T}}}\Phi_S$ et $\partial_{\dot{\beta}}\Phi_S$ permet d'aboutir d'une part à la loi de frottement avec adhérence (7) et d'autre part à la loi d'évolution de l'intensité d'adhérence (8), où $(x)^- = \max(0, -x)$ est la partie négative de $x \in \mathbb{R}$.

$$-R^r_{\text{N}} + \beta^2 C_{\text{N}}\, u_{\text{N}} \geq 0\ , \quad u_{\text{N}} \geq 0\ , \quad \left(-R^r_{\text{N}} + \beta^2 C_{\text{N}}\, u_{\text{N}}\right)\, u_{\text{N}} = 0. \tag{6}$$

$$\left\{\begin{array}{l} R^r_{\text{T}} = \beta^2 C_{\text{T}}\, u_{\text{T}}\ , \quad R^r_{\text{N}} = R_{\text{N}}\ , \\ \|R_{\text{T}} - R^r_{\text{T}}\| \leq \mu |R_{\text{N}} - \beta^2 C_{\text{N}}\, u_{\text{N}}|, \\ \text{et} \left\{\begin{array}{l} \|R_{\text{T}} - R^r_{\text{T}}\| < \mu |R_{\text{N}} - \beta^2 C_{\text{N}}\, u_{\text{N}}| \ \Rightarrow\ \dot{u}_{\text{T}} = 0, \\ \|R_{\text{T}} - R^r_{\text{T}}\| = \mu |R_{\text{N}} - \beta^2 C_{\text{N}}\, u_{\text{N}}| \ \Rightarrow\ \exists \lambda \geq 0,\ \dot{u}_{\text{T}} = \lambda (R_{\text{T}} - R^r_{\text{T}}). \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{7}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\beta} = -[(w g'(\beta) - \beta\, (C_{\text{N}}\, u_{\text{N}}^2 + C_{\text{T}}\, \|u_{\text{T}}\|^2))^- / b]^{1/p} \ \text{ si } \beta \in [0, 1[, \\ \dot{\beta} \leq -[(w g'(\beta) - \beta\, (C_{\text{N}}\, u_{\text{N}}^2 + C_{\text{T}}\, \|u_{\text{T}}\|^2))^- / b]^{1/p} \ \text{ si } \beta = 1\, . \end{array}\right. \tag{8}$$

3. Sauts de solution

L'existence de solutions non régulières est une des difficultés majeures des modèles de zone cohésive (le comportement interfacial adoucissant rend le problème mal posé). Si la forme de la courbe contrainte-saut de déplacement de ces modèles n'a pas d'influence sur l'évolution stationnaire de la fissuration (il est possible d'identifier dans ce cas là le taux de restitution de l'énergie à l'énergie de décohésion : $G = \int_0^{\delta} \sigma([u]) \cdot d[u]$ où δ est la norme du saut de déplacement à partir duquel $\beta = 0$), elle devient déterminante à l'amorçage des fissures. Un théorème d'unicité conditionnelle peut être obtenu pour le cas de solides élastiques cohésifs soumis à une évolution quasi-statique. Cette condition d'unicité est explicitée sur l'exemple simple d'une structure plane en traction.

3.1. *Existence et unicité conditionnelle de solutions à un problème quasi-statique de décohésion de solides élastiques*

Nous considérons ici le problème quasi-statique de deux corps en contact adhésif. Par soucis de simplification, les déplacements imposés sur les bords des corps Ω^1 et Ω^2 sont supposés nuls et on prend $p = 1$ et $g(\beta) = \beta$. On introduit les ensembles $V^\alpha = \left\{ v^\alpha \in \left[H^1(\Omega^\alpha)\right]^m ;\ v^\alpha = 0 \text{ p.p. sur } \partial\Omega_U^\alpha \right\}$ $(\alpha = 1, 2)$, $V = V^1 \times V^2$, $K = \left\{ v = (v^1, v^2) \in V;\ v_{\mathrm{N}} \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c \right\}$ et $H = L^\infty(\Gamma_c)$. On suppose les forces volumiques et surfaciques assez régulières : $f \in W^{1,2}(0,T;[L^2(\Omega^1)]^m \times [L^2(\Omega^2)]^m)$, $F \in W^{1,2}(0,T;[L^2(\partial\Omega_F^1)]^m \times [L^2(\partial\Omega_F^2)]^m)$, ce qui assure que $\phi \in W^{1,2}(0,T;V)$, où on a posé (sommation sur les indices répétés) : $(\phi, v) = \int_{\Omega^\alpha} f^\alpha \cdot v^\alpha dx + \int_{\partial\Omega_F^\alpha} F^\alpha \cdot v^\alpha ds$, $\forall v \in V$. En l'absence de frottement, en se donnant des conditions initiales $u_0 \in K$ et $\beta_0 \in H \cap [0, 1]$ et en supposant une loi "statique" pour l'évolution de β (sous certaines hypothèses peu restrictives concernant Ψ_S et Φ_S, on peut considérer une fonction $g^\star$ telle que $\beta = g^\star([u]) \in H$), on obtient, par extension du problème quasi-statique de contact unilatéral avec frottement considéré dans [COC 96], le problème variationnel suivant :

$$a(u, v-u) + \int_{\Gamma_c} \xi([u]) \cdot ([v] - [u])\, ds - (\phi, v-u) \geq 0,\ \forall v \in K, \tag{9}$$

où $\xi : [L^2(\Gamma_c)]^3 \to [L^2(\Gamma_c)]^3$ est de manière générale la contrainte interfaciale et $a(u,v) = \int_{\Omega^\alpha} A^\alpha_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u^\alpha) \varepsilon_{kl}(v^\alpha) dx$.

En supposant ξ lipschitzienne (de constante c_1), on peut alors montrer ([MON 00]) que l'application $\tilde{s} : k \to \xi([u(k)])$ où $u(k) \in K$ est la solution de :

$$a(u, v-u) - (\phi, v-u) + \int_{\Gamma_c} k \cdot ([v] - [u]) ds \geq 0 \quad \forall v \in K, \tag{10}$$

admet un unique point fixe $\bar{k}$ dès lors que $\lambda^2 c_1 / m < 1$, où m est la constante de coercivité de a (inégalité de Korn et déplacements imposés) et λ est une constante liée à la continuité de l'injection de $[H^{1/2}(\Gamma_c)]^3$ dans $[L^2(\Gamma_c)]^3$ et à celle de l'application trace de $[H^1(\Omega^i)]^3$ dans $[H^{1/2}(\partial\Omega^i)]^3$, pour $i = 1, 2$. Le déplacement $u(\bar{k})$ est alors la solution du problème (9).

3.2. *Un exemple uniaxial*

Soit une structure 2D simple composée d'un élément interfacial en série avec un barreau élastique de longueur L et de module E (FIG. 1 : discrétisation spatiale et comportement en série). Pour plus de détails sur cet exemple, nous renvoyons à [CHA 00].

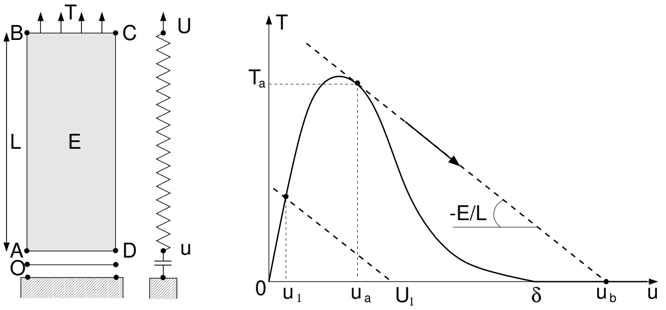


Figure 1. *Exemple uniaxial illustrant l'apparition de "sauts de solution" lors d'une décohésion interfaciale : situation mécanique et comportement local*

Soient U le déplacement global appliqué en BC, T la contrainte résultante et $[u]$ la séparation interfaciale encore notée u. On a : $U = u + (L/E)T$. Par ailleurs, le comportement interfacial est donné par : $T = \xi(u)$. Dans le repère (T, u), pour un déplacement imposé U, le point de fonctionnement est obtenu par intersection de la droite $T = -E/L(U - u)$ et de la courbe adoucissante $T = \xi(u)$ ($\xi(u) = 0$ au-delà d'une valeur δ de u). Lorsque U croît à partir de zéro, deux situations peuvent se présenter au-delà du pic de la courbe : soit le rapport $k = E/L$ est suffisamment grand, il existe alors toujours un point de fonctionnement et l'évolution est stable ; soit la valeur (négative) de la pente de la droite devient trop faible (en valeur absolue), un saut de solution de u_a à $u_b > u_a$ peut alors se produire. La possibilité d'obtenir deux, voire trois, points de fonctionnement est liée au rapport entre la valeur k de la pente de la droite et la valeur de la plus grande pente de la courbe adoucissante ; c'est-à-dire au rapport $|k|/(\mathrm{Sup}_u\,|\xi'(u)|)$, pour tout u tel que l'on soit au-delà du pic. La condition d'unicité du point de fonctionnement est donc : $\mathrm{Sup}_u\,|\xi'(u)|\,/|E/L| < 1$. Si la courbe adoucissante possède un point d'inflexion, le $\mathrm{Sup}_u\,|\xi'(u)|$ y est atteint. Sinon il est atteint en u_a (ce qui est le cas du modèle limite de [RAO 99]).

Nous avons souligné que la forme de cette courbe adoucissante n'a pas d'influence sur la propagation stationnaire des fissures (les modèles de zone cohésive sont équivalents entre eux dès lors qu'ils présentent la même "aire sous la courbe"). L'exemple présenté montre qu'elle en a cependant dans deux situations : 1) lorsqu'il n'est plus possible d'écrire à bon droit la quantité $\int_0^\delta \sigma([u]) \cdot d[u]$ (ce qui est le cas lors d'un saut de solution, i.e. entre u_b et u_a), c'est-à-dire lorsque la fissuration n'est plus *stationnaire*, 2) à l'amorçage de la fissuration. Les modèles de zone cohésive indépendants de la vitesse de sollicitation donnent donc lieu plus ou moins facilement à des sauts de solution : les modèles qui présentent la plus forte pente dans leur régime adoucissant sont les plus instables. Pour pallier ces problèmes de solutions à saut, des régularisations visqueuses des modèles de décohésion ont été proposées dans la littérature ([LAD 95, CAN 96, CHA 00]). La sensibilité de ces modèles à la vitesse de sollicitation masque cependant certains phénomènes que l'on souhaite mettre en évidence. Par ailleurs, l'existence physique de cette viscosité n'est pas établie pour tous les matériaux. Une formulation dynamique des problèmes de fissuration par zone cohésive est ainsi présentée ci-dessous en 3D et en présence de contact et de frottement.

4. Contact, frottement et adhérence en 3D - Méthode NSCD

La méthode "Non-Smooth Contact Dynamics" (NSCD), initiée et développée par J.J. Moreau et M. Jean, est dédiée à la résolution de problèmes relatifs aux systèmes dynamiques en présence de contraintes unilatérales. Elle fournit un cadre mathématique rigoureux, sur les plans théorique et numérique, permettant d'appréhender correctement les problèmes de contact frottant. En particulier, elle propose un traitement non régularisé (pas de compliance, pas de pénalisation) des conditions de contact unilatéral et de frottement de Coulomb. De plus, une attention particulière est portée à l'intégration numérique en temps des équations du mouvement en présence de telles contraintes, susceptibles de générer des discontinuités en vitesses. Pour plus de détails concernant la méthode NSCD et ses fondements, nous renvoyons à [MOR 74, MOR 88] et [JEA 99].

Nous proposons ici de prendre en compte l'adhérence dans le cadre de la méthode NSCD, en considérant chaque point de contact comme une zone cohésive. Les paramètres mécaniques relatifs à ces zones cohésives peuvent varier en tout point de la discrétisation spatiale du problème. L'outil numérique correspondant est donc adapté aux problèmes de contact adhésif/frottant pour des collections à grand nombre d'objets (rigides ou déformables) et/ou aux problèmes de fissuration des matériaux multiphases (fissuration des constituants et décohésion des interfaces qui les lient).

4.1. *Cinématique et équation de la dynamique*

En présence de contraintes unilatérales, l'espace des fonctions à variations bornées est un cadre fonctionnel adéquat pour les vitesses, potentiellement discontinues (l'accélération ne peut plus être définie comme la dérivée temporelle classique de la vitesse). Le cadre des mesures différentielles et des distributions permet de remédier à ce problème. L'équation de la dynamique est donc écrite ici en termes de mesures. La discrétisation spatiale du Principe des Puissances Virtuelles conduit alors à :

$$M(q,t)d\dot{q} = F(q,\dot{q},t)dt - rd\nu, \tag{11}$$

où q et $\dot{q}$ sont les vecteurs déplacements et vitesses discrets, dt est une mesure de Lebesgue, $d\dot{q}$ est une mesure différentielle associée à $\dot{q}(t)$: $\int_{t_1}^{t_2} d\dot{q} = q(t_2^+) - q(t_1^-)\ \forall t_2 > t_1$, et $d\nu$ est une mesure réelle positive pour laquelle $d\dot{q}$ possède une densité.

Par intégration de (11) entre t_1 et t_2 compris dans $]0,\, T]$, on obtient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} M(q,t)d\dot{q} = \int_{t_1}^{t_2} F(q,\dot{q},t)dt - \int_{]t_1,\, t_2]} rd\nu, \\ \displaystyle q(t_2) = q(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}(\tau)d\tau. \end{cases} \tag{12}$$

4.2. *Discrétisation temporelle*

Dans le cadre de la mécanique non-régulière, l'évolution du terme $rd\nu$ de l'équation (11) est donnée par une inclusion différentielle modélisant les contraintes unilatérales. L'intégration en temps de cette inclusion éxige un schéma implicite ([MOR 74]). En supposant que $\forall\tau \in]t_i,\, t_{i+1}]\ M(q(\tau),\tau) = M(q_{i+1}, t_{i+1})$ et en considérant l'impulsion moyenne r_{i+1} comme variable du problème, l'intégration proposée, sur un intervalle $]t_i,\, t_{i+1}]$ de longueur h, s'écrit :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{]t_i,\, t_{i+1}]} rd\nu & = & hr_{i+1} \quad \text{(notation)}, \\ \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} M(q,t)d\dot{q} & = & M(q_{i+1}, t_{i+1})\left(\dot{q}((t_{i+1})^+) - \dot{q}((t_i)^-)\right). \end{cases} \tag{13}$$

Plus classiquement, l'utilisation d'une θ-méthode ($\theta \geq 1/2$) pour l'intégration des forces intérieures et pour l'estimation des déplacements conduit à :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(q,\dot{q},t)dt & = h\left\{(1-\theta)F_i + \theta F_{i+1}\right\}, \\ q_{i+1} & = q_i + h\left\{(1-\theta)\dot{q}_i + \theta\dot{q}_{i+1}\right\}. \end{cases} \tag{14}$$

On utilise ici la notation générique : $X(t_i) = X_i$, étendue aux fonctions de plusieurs variables : $F(q(t_i), \dot{q}(t_i), t_i) = F_i$. En utilisant (14) et (13), le système (12) devient ainsi (pour des raisons évidentes, les variables numériques ont une valeur unique à un incrément de temps donné) :

$$\begin{cases} M_{i+1}\left(\dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i\right) - h\left\{(1-\theta)F_i + \theta F_{i+1}\right\} + hr_{i+1} = 0, \\ q_{i+1} = q_i + h\left\{(1-\theta)\dot{q}_i + \theta\dot{q}_{i+1}\right\}. \end{cases} \tag{15}$$

La première équation de (15) est du type $\mathcal{R}(\dot{q}_{i+1}) = 0$. Elle est résolue par une méthode de Newton-Raphson (k est l'exposant d'itération). On note :

$$\left\{\begin{array}{ll} M^k & = M(q^k_{i+1}, t_{i+1}), \\ C^k & = -\dfrac{\partial F_{i+1}}{\partial \dot{q}}(\dot{q}^k_{i+1}, q^k_{i+1}, t_{i+1}), \\ K^k & = -\dfrac{\partial F_{i+1}}{\partial q}(\dot{q}^k_{i+1}, q^k_{i+1}, t_{i+1}), \\ w^k & = (M^k + h\theta C^k + h^2\theta^2 K^k)^{-1}, \end{array}\right. \tag{16}$$

où C^k est la matrice d'amortissement tangente, K^k la matrice de raideur tangente, w^k l'inverse de la matrice des itérations. Dans la suite, on désigne par $\dot{q}^{k+1}_{\text{lib}}$ la valeur de la vitesse $\dot{q}^{k+1}_{i+1}$ en l'absence de contact (i.e. lorsque $r^k_{i+1} = 0$). La résolution de (15) conduit au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{q}^{k+1}_{i+1} & = \dot{q}^{k+1}_{\text{lib}} - w^k h r^k_{i+1}, \\ q^{k+1}_{i+1} & = q_i + h\left\{(1-\theta)\dot{q}_i + \theta \dot{q}^{k+1}_{i+1}\right\}. \end{array}\right. \tag{17}$$

4.3. *Contact, frottement et prise en compte de l'adhérence*

Pour la simplicité des écritures et de la mise en œuvre, le problème de contact frottant avec adhérence est résolu pour chaque contact α dans son repère locale. La vitesse relative local vaut alors : $\dot{U}^\alpha = H^{\star\alpha}(q)\dot{q}$. Par dualité, le représentant local R^α de la réaction r^α au contact α vaut : $r^\alpha = H^\alpha(q)R^\alpha$, où les applications linéaires $H^\star$ et H vérifient : $H^\star = H^T$. L'écriture locale de la première équation de (17) donne :

$$\begin{aligned} (\dot{U}^\alpha)^{k+1}_{i+1} &= (\dot{U}^\alpha_{\text{lib}})^{k+1} - \sum_\beta (W^{\alpha\beta})^k h (R^\beta)^k_{i+1}, \\ &= \underbrace{(\dot{U}^\alpha_{\text{lib}})^{k+1} - \sum_{\beta\neq\alpha} (W^{\alpha\beta})^k h (R^\beta)^k_{i+1}}_{=(\dot{U}^\alpha_{\text{libloc}})^{k+1} \quad \text{(notation)}} - (W^{\alpha\alpha})^k h (R^\alpha)^k_{i+1}, \end{aligned}$$

où $\bar{q}$ est une évolution intermédiaire de q (*voir* [JEA 99]) et où on a posé, pour le contact α :

$$(W^{\alpha\beta})^k = H^{\star\alpha}(\bar{q}) w^k H^\beta(\bar{q}) \quad \text{et} \quad (\dot{U}^\alpha_{\text{lib}})^{k+1} = H^{\star\alpha}(\bar{q})\dot{q}^{k+1}_{\text{lib}}. \tag{18}$$

Pour la prise en compte du contact unilatéral et du frottement, nous notons synthétiquement que le couple $\left((\dot{U}^\alpha)^{k+1}_{i+1}, (R^\alpha)^{k+1}_{i+1}\right)$ doit respecter les graphes de Signorini et de Coulomb. Brièvement (et avec les conventions des équations (6) et (7)) si un couple $(\dot{x}, y)$ respecte les graphes de Signorini et Coulomb, on a le système (19).

$$\left\{\begin{array}{l} (x_{\text{N}}, y_{\text{N}}) \text{ vérifient} : x_{\text{N}} \geq 0,\ y_{\text{N}} \leq 0,\ x_{\text{N}} y_{\text{N}} = 0 \\ (\dot{x}_{\text{T}}, y_{\text{T}}) \text{ vérifient} : \left\{\begin{array}{l} \|y_{\text{T}}\| \leq \mu\,|y_{\text{N}}|, \\ \|y_{\text{T}}\| < \mu\,|y_{\text{N}}| \Rightarrow \dot{u}_{\text{T}} = 0, \\ \|y_{\text{T}}\| = \mu\,|y_{\text{N}}| \Rightarrow \exists\lambda \geq 0,\ \dot{x}_{\text{T}} = \lambda y_{\text{T}}. \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{19}$$

En omettant les indices d'itération et d'incrément, on peut réécrire le problème tridimensionnel sous la forme du système (20) où $\rho > 0$ et $D(\mu|R_{\text{N}}^{\alpha}|)$ est le disque de rayon $\mu|R_{\text{N}}^{\alpha}|$ centré en l'origine.

$$\left\{ \begin{aligned} &\dot{U}^{\alpha} - \dot{U}_{\text{libloc}}^{\alpha} + W^{\alpha\alpha} h R^{\alpha} && = 0, \\ &R_{\text{N}}^{\alpha} - \text{proj}_{\mathbb{R}^-}\left(R_{\text{N}}^{\alpha} + \rho U_{\text{N}}^{\alpha}\right) && = 0, \\ &R_{\text{T}}^{\alpha} - \text{proj}_{D(\mu|R_{\text{N}}^{\alpha}|)}\left(R_{\text{T}}^{\alpha} + \rho U_{\text{T}}^{\alpha}\right) && = 0. \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Il existe donc une fonction ϕ telle que l'on ait : $\phi(\dot{U}^{\alpha},\, R^{\alpha}) = 0$. Les racines de cette équation non linéaire sont calculées par un algorithme de Newton généralisé aux fonctions non régulières (*voir* [ALA 88]).

Selon le modèle présenté au paragraphe 2, la prise en compte de l'adhérence dans les problèmes de contact frottant peut se faire par le changement de variable suivant : $\widetilde{R} = R - R_{\text{adh}}$, où R_{adh} est en toute généralité une force de résistance supplémentaire dont l'intensité diminue lorsque la décohésion progresse. En particulier, on a ici : $R_{\text{adh}} = \beta^2\left(C_{\text{N}} U_{\text{N}} n + C_{\text{T}} U_{\text{T}}\right)$.

En posant $\widetilde{\dot{U}_{\text{libloc}}^{\alpha}} = \dot{U}_{\text{libloc}}^{\alpha} + W^{\alpha\alpha} h R_{\text{adh}}^{\alpha}$, la réécriture de la première équation de (20) est alors :

$$\dot{U}^{\alpha} = \dot{U}_{\text{libloc}}^{\alpha} - W^{\alpha\alpha} h \widetilde{R}^{\alpha} = \widetilde{\dot{U}_{\text{libloc}}^{\alpha}} - W^{\alpha\alpha} h R^{\alpha}. \tag{21}$$

5. Mise en œuvre numérique

L'algorithme de résolution est le suivant :

- <u>boucle</u> : incrément de temps et Newton-Raphson
  - <u>boucle</u> : couplage adhérence/frottement
point fixe sur $\dot{U},\ R,\ \beta$
    - <u>boucle</u> : parcours des nœuds de contact
(α nœud courant)
      1. évaluation de $\dot{U}_{\text{libloc}}^{\alpha}$
      2. calcul de β^{α} après estimation de U^{α}
      3. calcul de R_{adh}^{α}
      4. changement de variable $\widetilde{\dot{U}_{\text{libloc}}^{\alpha}} = \dot{U}_{\text{libloc}}^{\alpha} + W^{\alpha\alpha} h R_{\text{adh}}^{\alpha}$
      5. calcul de $\dot{U}^{\alpha} = \widetilde{\dot{U}_{\text{libloc}}^{\alpha}} - W^{\alpha\alpha} h R^{\alpha}$
         - <u>boucle</u> : résolution de $\phi(\dot{U}^{\alpha},\, R^{\alpha}) = 0$
itérations de la méthode de Newton généralisée.

Une particularité de cet algorithme est le découplage entre les non-linéarités usuelles en mécanique des milieux continus (algorithme de Newton-Raphson) et l'endommagement surfacique en présence de frottement (modèles de zone cohésive). Du point de vue de la mise en œuvre numérique, des algorithmes traditionnels, traitant des non-linéarités matérielles et géométriques peuvent ainsi être pris en compte aisément. Dans l'exemple qui suit, une formulation éléments finis lagrangienne totale est notamment utilisée pour la résolution d'un problème de flambement.

Enfin, une attention particulière est portée au choix des repères locaux. Pour chaque contact α, deux repères distincts sont introduits. Le premier est le repère local classique en mécanique du contact (approche maître-esclave), actualisé à chaque incrément de temps. Le second est celui de l'adhérence coïncidant avec le premier repère à l'instant initial. Il est ensuite fixé de manière à conserver l'histoire des variables internes u_{N} et u_{T} du modèle de zones cohésives.

6. Un exemple académique : délamination par flambement

Pour illustrer les perspectives de ce modèle et de l'outil numérique, nous présentons un exemple de fissuration par flambement d'une plaque carrée. La plaque, de coté $2L$ présente une pré-fissure carrée en son centre de côté $2D$, située à une profondeur h_1 de son épaisseur h (voir FIG. 3). En compression biaxiale (déplacements imposés u sur les cotés), le premier mode de flambement est un mode local de cloquage de la partie la plus fine de la plaque. Dans le cas d'une pré-fissure circulaire, nous renvoyons à [COC 91] pour l'étude de ce type de flambement.

Le maillage est composé d'éléments H8 en formulation lagrangienne totale. Sur la surface carrée de chacun de ces éléments correspondant à la zone de contact, on place quatre points de contact adhésif de position relative $\{(\frac{1}{4},\frac{1}{4})(\frac{1}{4},\frac{3}{4})(\frac{3}{4},\frac{1}{4})(\frac{3}{4},\frac{3}{4})\}$. Les paramètres géométriques et matériels sont donnés par :

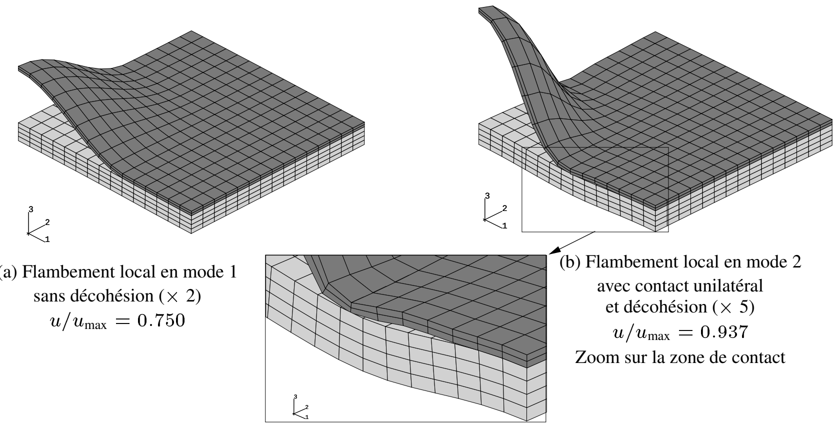
$$L = 40mm,\ D/L = 0.6,\ h/L = 0.1,\ h_1/h = 0.2, \tag{22}$$

$$E = 130GPa,\ \nu = 0.3,\ \rho = 2500kg/m^3, \tag{23}$$

$$\mu = 0.1,\ w = 100J/m^2,\ C_{\mathrm{N}} = 130GPa/mm,\ C_{\mathrm{T}}/C_{\mathrm{N}} = 100,\ p = 1,\ b = 0 \tag{24}$$

Les paramètres mécaniques de la zone cohésive (24) conduisent à une évolution de la fissuration indépendante de la vitesse de sollicitation ($p = 1$, $b = 0$). L'énergie de décohésion est fixée à $100J/m^2$. Les raideurs normale et tangentielle assurent que le comportement du système solide/zone cohésive/solide avant décohésion est très voisin du comportement élastique du solide seul. Avant amorçage de la fissuration, la présence de la zone cohésive ne remet donc pas en question le comportement élastique de la plaque. Enfin, les comportements de la zone cohésive en mode I et en mode II-III sont différenciés.

Les rapports géométriques (22) conduisent, pour une pré-fissure circulaire dans un matériau isotrope, au meilleur compromis entre une charge de flambement faible et une énergie de fissuration élevée ([EVA 84]). Ces valeurs représentent le cas critique entre les deux cas extrêmes suivants : pour une pré-fissure proche de la surface ($h_1/h \ll 1$) et peu étendue ($D/L \ll 1$), le flambement apparaît prématurément puis se développe progressivement selon un mode local générant une énergie de fissuration faible, à l'inverse, pour une pré-fissure profonde et étendue, un mode de flambement local apparaît pour des valeurs de charges de flambement élevées puis se développe rapidement selon un mode global.



(a) Flambement local en mode 1 sans décohésion ($\times$ 2) $u/u_{\max} = 0.750$

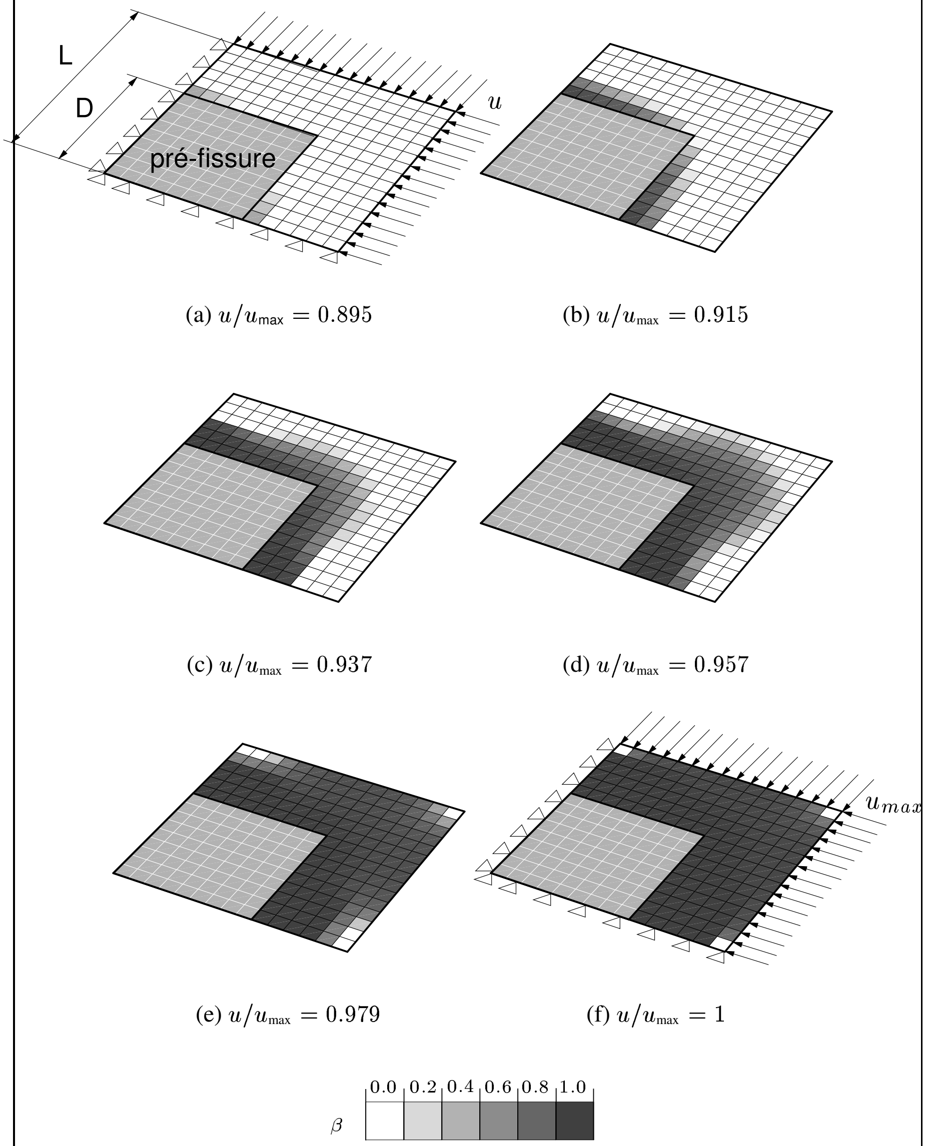
(b) Flambement local en mode 2 avec contact unilatéral et décohésion ($\times$ 5) $u/u_{\max} = 0.937$ Zoom sur la zone de contact

Figure 2. *Propagation de la décohésion*

Dans le cas présenté ici d'une pré-fissure carrée, la FIG. 2(a) illustre qu'un mode de flambement local croît progressivement jusqu'à $u/u_{max} = 0.890$. Au-delà, ce flambement devient le moteur de la fissuration : l'énergie élastique stockée dans le mode de flambement est dissipée par fissuration lorsque le seuil énergétique de décohésion est atteint. La FIG. 2(b) indique qu'un mode global de flambement apparaît ensuite, faisant intervenir du contact unilatéral et du frottement. Cette situation est une conséquence de la propagation de la fissure qui conduit à une diminution de la charge limite de flambement global de la plaque. L'endommagement surfacique progresse alors rapidement en mode mixte. L'évolution de la variable d'endommagement β au cours de la fissuration est donnée sur la FIG. 3.

7. Conclusion

Une formulation dynamique d'un modèle de zone cohésive a été proposée en dimension trois. Ce modèle, couplant endommagement, frottement de Coulomb et contact unilatéral permet de simuler la fissuration des solides et le décohésion des interfaces. La formulation thermodynamique du modèle a été présentée. Lorsque la fissuration ou la décohésion interfaciale est stationnaire, on retrouve le modèle classique de la mécanique de la rupture avec une prise en compte supplémentaire d'éventuelles conditions de non pénétration et de frottement sur les lèvres de la fissure. Les modèles de zone cohésive, implémentés sous forme d'éléments finis surfaciques ou sous forme de conditions mixtes contrainte/déplacement, permettent en outre de simuler l'amorçage



(a) $u/u_{\max} = 0.895$

(b) $u/u_{\max} = 0.915$

(c) $u/u_{\max} = 0.937$

(d) $u/u_{\max} = 0.957$

(e) $u/u_{\max} = 0.979$

(f) $u/u_{\max} = 1$

Figure 3. *Evolution de la variable d'endommagement β au cours de la fissuration de la plaque*

de la fissuration. Il s'avère cependant que le comportement surfacique adoucissant peut conduire à des solutions à saut. Différentes régularisations de ces problèmes de sauts ont été envisagées dans la littérature : évolution visqueuse de l'endommagement surfacique, modèles non locaux, raffinement de maillage, pilotage local de l'évolution de la décohésion. La formulation dynamique que nous proposons ici permet d'équilibrer les bilans énergétiques en considérant les termes cinétiques.

La mise en œuvre numérique du modèle a été réalisée dans le cadre de la méthode "Non-Smooth Contact Dynamics" dédiée au traitement des évolutions dynamiques en présence de contraintes unilatérales. Le cadre mathématique sur lequel elle repose autorise notamment un traitement convenable des évolutions éventuellement discontinues des vitesses sur la zone de contact (problème d'impact). La pertinence du modèle et de l'outil numérique correspondant a été soulignée sur un exemple tridimensionnel de fissuration par flambement d'une plaque carrée pré-fissurée. Pour le cas d'une pré-fissure carrée, on retrouve qualitativement des résultats précédemment obtenus dans la littérature pour une pré-fissure circulaire.

8. Bibliographie

[ALA 88] ALART P., CURNIER A., « A generalized newton method for contact problems with friction », *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. 7, 1988, p. 67-82.

[CAN 96] CANGÉMI L., COCU M., RAOUS M., « Adhesion and friction model for the fibre/matrix interface of a composite », *Third biennal Joint Comference on engineering system design and analysis*, Montpellier, July 1-4 1996, ASME, p. 157-163.

[CHA 00] CHABOCHE J.-L., FEYEL F., MONERIE Y., « Interface debonding model : a viscous regularization with a limited rate dependency », *Int. J. Solids Structures*, vol. à paraître, 2000.

[COC 91] COCHELIN B., POTIER-FERRY M., « A numerical model for buckling and growth of delaminations in composite laminates », *Computer Meth. Appl. Mech. and Engrg.*, vol. 89, 1991, p. 361-380.

[COC 96] COCU M., PRATT E., RAOUS M., « Formulation and approximation of quasistatic frictional contact », *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 34, n° 7, 1996, p. 783-798.

[COS 97] COSTANZO F., WALTON J., « A study of dynamic crack growth in elastic materials using a cohesive zone model », *Int. J. Engng Sci.*, vol. 35, n° 12-13, 1997, p. 1085-1114.

[EVA 84] EVANS A., HUTCHINSON J., « On the mechanics of delamination ans spalling in compressed films », *Int. J. Solids Structures*, vol. 20, n° 5, 1984, p. 455-466.

[FRé 82] FRÉMOND M., « Equilibre des structures qui adhèrent à leur support », *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 295, n° Série II, 1982, p. 913-916.

[JEA 99] JEAN M., « The Non Smooth Contact Dynamics method », MARTINS J., KLARBRING A., Eds., *Computer Meth. Appl. Mech. and Engrg., Special Issues on Computational Modeling on Contact and Friction*, vol. 177, 1999, p. 235-257.

[LAD 95] LADEVÈZE P., « A damage computational approach for composites : basic aspects and micromechanical relations », *Computational Mechanics*, vol. 17, 1995, p. 142-150.

[MON 00] MONERIE Y., « Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre/matrice », PhD thesis, Université de la Méditerranée, 2000.

[MOR 74] MOREAU J.-J., « On unilateral constraints, friction and plasticity », CAPRIZ G., STAMPACCHIA G., Eds., *New variational techniques in mathematical physics*, CIME II ciclo 1973, Edizioni Cremonese, 1974, p. 175-322.

[MOR 88] MOREAU J.-J., « Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics », MOREAU J.-J., PANAGIOTOPOULOS P., Eds., *Nonsmooth mechanics and applications*, p. 1-82, CISM 302, Spinger Verlag, 1988.

[NEE 99] NEEDLEMAN A., ROSAKIS A., « The effect of bond strenght and loading rate on the conditions governing the attainment of intersonic crack growth along interfaces », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 47, 1999, p. 2411-2450.

[RAO 97] RAOUS M., CANGÉMI L., COCU M., « Un modèle couplant adhérence et frottement pour le contact unilatéral entre deux solides déformables », *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 329, n^{o} Série II b, 1997, p. 503-509.

[RAO 99] RAOUS M., CANGÉMI L., COCU M., « Consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact », *Computer Meth. Appl. Mech. and Engrg.*, vol. 177, n^{o} 3-4, 1999, p. 383-399.

[XU 94] XU X.-P., NEEDLEMAN A., « Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 42, n^{o} 9, 1994, p. 1397-1434.