

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

No. attribué par la bibliothèque

/ / / / / / / / / / / / / /

T H E S E

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Automatique Productive

préparée au laboratoire : INRIA Rhône-Alpes
dans le cadre de l'École Doctorale : **EEATS**

présentée et soutenue publiquement
par

Jean-Matthieu BOURGEOT

le 27 octobre 2004

Titre :

**Contribution à la commande de
systèmes mécaniques non-réguliers**

Directeur de thèse : Bernard BROGLIATO

JURY

M. Guy BORNARD	Président
M. Claude-Henri LAMARQUE	Rapporteur
M. Bernhard MASCHKE	Rapporteur
M. Bernard BROGLIATO	Directeur de thèse
M. Carlos CANUDAS-DE-WIT	Co-directeur de thèse
M. Rodolphe SEPULCHRE	Examineur



Remerciements

Cette thèse n'aurait pu voir le jour sans l'appui scientifique et relationnel dont j'ai eu la chance de bénéficier durant ces trois années. Je remercie, ici, tous ceux qui m'ont soutenu et "supporté", plus particulièrement :

J'exprime ma très sincère reconnaissance à Bernard Brogliato pour l'excellente direction de ce travail. Tous ses conseils, ses remarques, la grande liberté qu'il m'a laissé et surtout sa très grande disponibilité ont rendu cette thèse possible.

Je remercie également Monsieur Carlos Canudas de Wit pour avoir co-encadré cette thèse, et m'avoir permis de découvrir d'autres horizons scientifiques au cours de mon séjour dans son équipe au Laboratoire d'Automatique de Grenoble.

Je remercie les membres de mon jury de thèse : Monsieur Guy Bornard pour en avoir accepté la présidence, Messieurs Claude-Henri Lamarque et Bernhard Maschke pour le temps et l'attention apportés au rapport de ce mémoire, enfin Monsieur Rodolphe Sepulchre pour avoir examiné ce travail.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Bernard Espiau, directeur de l'INRIA Rhône-Alpes qui m'a hébergé au cours de cette thèse, mais surtout pour m'avoir donné l'envie de poursuivre dans la recherche alors qu'il était mon encadrant de DEA.

D'une façon plus amicale je remercie tous ceux qui ont partagé un coin de bureau avec moi : James L. (*pour les caps*), Fabien L. (*pour les manpages*), Fanny B. (*pour les parties d'Elixir*), Tina (*pour les conseils avisés*), Olivier T. (*pour la spéléo*), Gwenaël D. (*pour les clefs*), David R. (*pour caliméro*), Hamoudi K. (*pour les bouraks, et pour sa bonne humeur permanente*), Emil D. (*pour le chocolat*), Emmanuel W. (*pour les tartes au flan*), Jérôme M., Sophie C. (*pour le rayon de soleil dans le bureau*) et Bebert (*pour son amitié*). Ainsi que les différents moniteurs avec qui j'ai pu partagé une certaine vision de l'enseignement : Céline D. (*pour le gâteau à la gelée*), Julien B. (*pour les cours de skating*), Agnès F., Barthelemy C., Catherine C., Nathalie R., Astérix, Sonia J., Stéphane G. (*pour le baby-foot*), Charlotte V.

Une pensée à Janine pour avoir participé à la réussite de mon pot de thèse ainsi que de nombreuses "bouffes *BIP*" par la confection de ses cakes toujours autant appréciés !

Une dernière pensée émue à mes parents qui me vouent une confiance inconditionnelle et qui m'ont toujours soutenus dans mes projets...

Merci.

Table des matières

Table des matières	iii
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	ix
Glossaire & Notations	1
Avant-propos	3
1 Quelques rappels sur la mécanique non régulière	7
1.1 Introduction	7
1.1.1 Domaine admissible	9
1.2 Loi de chocs	10
1.2.1 Loi unidimensionnelle	10
1.2.2 Loi multidimensionnelle	11
1.2.3 Existence et unicité des solutions	13
1.3 Les impacts : Perturbation ou bénéfique pour la stabilisation?	14
I Poursuite de trajectoires pour un système mécanique Lagrangien	17
2 Introduction - Positionnement du problème	19
2.1 Les limites de l'approche tangentielle	20
2.2 Dynamique	22
2.3 Modèle d'impact	23
2.4 Tâche cyclique	23
2.5 Les différentes trajectoires de références	24
2.6 Conclusion	27
3 Notions de stabilité en mécanique non régulière	29
3.1 Définitions de la stabilité	29
3.1.1 Définition de la stabilité faible	29
3.1.2 Définition de la stabilité forte	29
3.2 Théorème de stabilité	30
3.3 Conclusion	33

4	Structure du contrôleur	35
4.1	Idée directrice	35
4.1.1	Superviseur	37
4.2	Trajectoires désirées pour la phase de transition	39
4.3	Conditions de détachement	41
4.4	Conclusion	44
5	Etude de deux contrôleurs non-linéaires	45
5.1	Loi de Paden-Panja	45
5.1.1	Calcul des variations de la fonction de Lyapunov	47
5.1.2	Stratégie de contrôle pour assurer le détachement	51
5.1.3	Analyse de stabilité de la boucle fermée	53
5.1.4	Conclusion	56
5.2	Loi à décroissance exponentielle	56
5.2.1	Adaptation de la loi de Slotine-Li	56
5.2.2	Condition de stabilité	57
5.2.3	Conclusion	59
5.3	Conclusions	60
6	Simulations	61
6.1	Présentation de la simulation	61
6.1.1	Bras manipulateur à 2ddl	61
6.1.2	Méthodes numériques utilisées	62
6.2	Résultats de simulation	63
6.2.1	La loi de Paden-Panja	64
6.2.2	La loi de Slotine-Li	68
6.2.3	Robustesse	69
6.3	Conclusion	73
7	Impacts Multiples	75
7.1	Introduction	75
7.2	Stabilisation sur un 2-impact	76
7.3	Impact sur une surface précédant un 2-impact	76
7.4	Le cas général	77
7.5	Conclusion	79
II	Etude d'un système mécanique sous-actionné soumis à des chocs multiples	81
8	Problématique de la marche en double support	83

8.1	Le bipède Rabbit	83
8.2	La marche en simple support : le pendule inversé	84
8.3	Le double support	85
8.4	Etude d'un double impact	87
8.5	Le "rocking block" simple	89
8.6	Conclusion	90
9	Identification du bipède par un bloc déformable	93
9.1	Cas du bloc de forme et d'inertie variable	93
9.1.1	Caractérisation du bloc de forme quelconque.	93
9.1.2	Conditions de non basculement.	94
9.2	Application au Rabbit	97
9.2.1	Equivalence bloc - Rabbit	97
9.2.2	Expression de $I(q)$	97
9.2.3	Application aux données numériques du Rabbit	98
9.3	Conclusion	99
	Conclusion générale	101
10.1	Conclusions	101
10.2	Perspectives	101
	Bibliographie	103
	Annexe	106
	A Preuve de la proposition 7	107
	B Preuve de la proposition 8	111
	C Problème Linéaire de Complémentarité	117
	D Commande par la passivité (passivity based control)	119
D.1	Généralités	119
D.1.1	Définition de la passivité	119
D.1.2	Fonction de stockage	119
D.1.3	Théorème de la passivité	120
D.2	Loi de Paden et Panja	121
D.3	Loi de Slotine et Li	123

Table des figures

1.1	Points non différentiables	9
1.2	Exemple d'un domaine non-convexe régulier	10
1.3	Impact unidimensionnel	11
1.4	Système libre <i>vs.</i> Système contraint	14
1.5	Système Lagrangien contraint	15
2.1	Trajectoire du système non contraint	21
2.2	Exemple à 1 degré de liberté	25
2.3	Les différentes trajectoires de références	27
3.1	Exemple d'évolution de la fonction de Lyapunov	33
4.1	Structure du contrôleur	37
4.2	Evolution du superviseur	38
4.3	Trajectoires désirées	39
4.4	Trajectoire désirée de λ_d	43
6.1	Robot manipulateur plan à deux degrés de liberté	61
6.2	Trajectoires de références - un demi cercle	62
6.3	n° 1: Trajectoire dans le plan Oxy	64
6.4	n° 1: Fonction de Lyapunov $V(t)$	64
6.5	n° 2: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 0$	65
6.6	n° 3: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 100$	65
6.7	n° 3: Evolution de la fonction de Lyapunov	65
6.8	n° 3: Couplages entre $q_1(t)$ et $q_2(t)$	66
6.9	n° 3: Trajectoires dans le plan Oxy	66
6.10	n° 4: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 75$	67
6.11	n° 5: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 50$	67
6.12	n° 6: Exemple de cas instable	67
6.13	n° 6: Divergence de la fonction $V(t)$	67
6.14	n° 7: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 0$	68
6.15	n° 8: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 100$	68
6.16	n° 8: Evolution de la fonction de Lyapunov	68
6.17	n° 9: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $t_0 \geq \tau_1^k$	69
6.18	n° 9: Saut négatif de $V(t)$	69
6.19	n° 10: Robustesse - $q_d(t)$ et $q(t)$	70
6.20	n° 10: Robustesse - fonction $V(t)$	70
6.21	n° 11: Robustesse - $q_d(t)$ et $q(t)$	70

6.22 n° 11: Robustesse - fonction $V(t)$	70
6.23 n° 12: Position de la contrainte sous-estimée	71
6.24 n° 12: Erreur sur $V(t)$	71
6.25 n° 13: Position de la contrainte sur-estimée - Non Stabilisation	72
6.26 n° 13: Non détection de l'impact	72
6.27 n° 13: Estimation en ligne de la position de la contrainte	72
6.28 n° 13: Erreur sur $V(t)$	72
7.1 Impact Multiple (2-impact)	76
7.2 Cas général	78
8.1 Le bipède Rabbit	83
8.2 Les deux contraintes unilatérales	83
8.3 Identification à un pendule (SS)	85
8.4 Cycle de marche d'un bipède [Azevedo, 2002]	85
8.5 Identification à un bloc (DS)	86
8.6 Contraintes dans l'espace des coordonnées généralisées	87
8.7 Quelle est l'évolution du mouvement après l'impact	87
8.8 Angle obtus, choc plastique	88
8.9 Angle aigu, choc plastique	88
8.10 Angle obtus, choc élastique	88
8.11 Angle aigu, choc élastique	88
8.12 Exemple de [Frémond, 2002]	90
9.1 Paramétrisation du bloc	93
9.2 Deux contraintes sur le bloc	94
9.3 Vecteurs normaux et vecteurs tangents	96
9.4 Configuration admissible pour une marche en double support	99
A.1 Trajectoire de transition de $q_{1d}^*(t)$	108
D.1 Les deux systèmes H_1 et H_2 en boucle fermée	121
D.2 Contrôleur de Paden et Panja	122
D.3 Contrôleur de Slotine et Li	124

Liste des tableaux

6.1	Valeurs numériques utilisées dans le simulateur	62
6.2	Valeurs des paramètres de chaque simulation	73

Glossaire

- ODE** (Ordinary Differential Equation) Equation différentielle ordinaire
DAE (Differential Algebraic Equation) Equation algébro-différentielle
LCP (Linear Complementarity Problem) Problème linéaire de complémentarité
DES (Discrete Event System) Système à évènements discrets
MDE (Measure Differential Equation) Equation différentielle à mesure

Notations mathématiques

$\lambda_{max}(M)$: la plus grande valeur propre de la matrice M

$\lambda_{min}(M)$: la plus petite valeur propre de la matrice M

$F(t^+)$: limite à droite de la fonction $F(\cdot)$ discontinue en t

$F(t^-)$: limite à gauche de la fonction $F(\cdot)$ discontinue en t

$\sigma_F(t)$: Saut de la fonction $F(\cdot)$ discontinue en t , $\sigma_F(t) = F(t^+) - F(t^-)$

$\lambda[a,b]$: mesure de Lebesgue de l'intervalle $[a,b]$

$X \geq 0$: le vecteur X de dimension m est positif si tout ses composantes le sont, $X_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$

$X \perp \lambda$ signifie que X et λ sont orthogonaux, i.e. $X^T \lambda = 0$

Notations relatives au contrôleur de la partie I

$\tau_i^{k_{cyc}}$: L'instant i du cycle k_{cyc} choisi par le concepteur. (time-based event)

$t_i^{k_{cyc}}$: L'instant i du cycle k_{cyc} dont l'occurrence est fonction de l'évolution du système. (state-based event)

t_k : représente de façon générique les instants d'impact lors d'une accumulation d'impacts, on omet l'exposant k_{cyc} relatif au cycle dans lequel on se trouve.

$I_{k_{cyc}} = [\tau_0^{k_{cyc}}, t_f^{k_{cyc}}]$: représente la phase de transition.

$\Omega_{2k_{cyc}+1} = [t_f^{k_{cyc}}, t_d^{k_{cyc}}]$: représente la phase complètement contrainte.

$\Omega_{2k_{cyc}} = [t_d^{k_{cyc}}, \tau_0^{k_{cyc}}]$: représente la phase libre.

$\Omega = \cup_{k_{cyc} \geq 0} \Omega_{k_{cyc}}$: représente les phases sans impact.

Avant-propos

Cette thèse s'inscrit dans le cadre des travaux réalisés à l'INRIA¹ Rhône-Alpes dans l'équipe BIPOP et au LAG² sur les systèmes dynamiques non-réguliers.

La classe des systèmes dynamiques non réguliers contient tous les systèmes présentant des sauts dans leurs états (impacts, réinitialisations de leurs états, systèmes à champs de vecteurs non différentiables et les conditions de complémentarité...). Comme une bille qui rebondit à terre, un circuit électrique comportant des diodes idéales ou des transistors CMOS [Bruma & Otten, 1997], un système hybride etc. Par contre dans cette étude nous nous intéresserons à une famille plus restreinte de tels systèmes que sont les systèmes mécaniques lagrangiens soumis à des contraintes unilatérales.

Les systèmes mécaniques soumis à des impacts sont nombreux, les plus courants sont les robots bipèdes, les jongleurs, les mécanismes avec jeu, ou toute sorte de robot présentant une interaction avec un autre robot ou avec son environnement.

Motivations

L'objectif principal de cette thèse est l'élaboration d'un schéma de commande pour assurer la poursuite de trajectoires pour des systèmes mécaniques non réguliers, c'est-à-dire des systèmes qui peuvent, au cours de leur évolution, rentrer en contact avec une surface sans pouvoir la pénétrer. La difficulté principale pour ce type de système est que si le système touche la surface avec une vitesse normale non nulle, il se produit un impact et des discontinuités apparaissent au niveau de la vitesse et des efforts de contact. De même des incertitudes au niveau de la position de la contrainte peuvent provoquer des impacts non sollicités entre le système et la surface.

L'étude de ces systèmes est importante pour certaines applications industrielles tels que le surfacage et la soudure, ou pour des applications en robotique tels que les robots bipèdes ou les jongleurs.

Ces systèmes peuvent être vus comme un mélange de systèmes continus et de systèmes à événements discrets dont l'évolution dépend de l'activation ou non des contraintes. Ceci nous oblige à développer de nouveaux schémas de contrôle hybrides et de nouveaux outils d'analyse

1. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

2. Laboratoire d'Automatique de Grenoble

adaptés à ces systèmes dynamiques. Dans [Pagilla, 2001], l’auteur propose une loi pour réguler la position d’un système mécanique sur une surface, en montrant que les sauts de la fonction de Lyapunov, qu’il a choisie, sont toujours négatifs aux instants d’impact. Il montre la stabilité de la commande proposée. Dans [Menini & Tornambè, 2001], les auteurs s’intéressent au problème de la poursuite de trajectoire pour un système non-régulier particulier : une particule de masse unité contrainte d’évoluer dans un cercle dont la trajectoire de référence percute les bords du disque une infinité de fois. Dans leurs schéma de commande, ils intègrent les rebonds dans l’expression de la trajectoire de référence. Ceci impose de connaître parfaitement le modèle d’impact pour espérer obtenir une stabilité asymptotique, de plus ils se limitent au cas purement élastique ($e_n = 1$).

A l’inverse [Mills & Lokhorst, 1993] présentent une structure de commande qui s’affranchit de la connaissance précise de la loi de restitution pour faire de la poursuite de trajectoires. Dans leur analyse, ils utilisent un modèle de contact compliant (système masse-ressort-amortisseur) pour modéliser l’interaction entre le système et la contrainte. L’intérêt d’une telle approche est d’avoir un état qui reste continu. La faiblesse de leur approche est d’avoir des gains qui sont fonction de la compliance du contact. Ainsi si l’on fait tendre vers l’infini la raideur du ressort modélisant le contact (pour tendre vers un contact rigide) alors la loi de commande nécessite l’utilisation de gains infinis.

Dans la première partie de cette thèse nous allons proposer une loi de commande pour faire de la poursuite de trajectoire pour des systèmes mécaniques dont les interactions avec l’environnement sont modélisées par de la complémentarité, et sans connaissance de la nature du contact (élastique ou plastique).

Le deuxième objectif de cette thèse est l’étude du comportement d’un robot bipède plan sous-actionné soumis à des impacts multiples. Cette étude est faite dans l’optique de réaliser une marche en double support pour le robot Rabbit.

Plan de lecture

Dans le premier chapitre, nous présenterons les aspects de la modélisation des systèmes lagrangiens soumis à des contraintes unilatérales.

Les chapitres 2 à 7 correspondent à la première partie du mémoire, relative à la poursuite de trajectoires pour des systèmes non-réguliers.

- le chapitre 2 présente la problématique de la poursuite de trajectoires,
- le chapitre 3 présente les notions de stabilité utilisées dans cette étude,
- le 4^{ème} chapitre détaille la structure du contrôleur proposé,
- le chapitre 5 présente deux variantes de notre schéma de contrôle,
- des simulations numériques sont exposées dans le chapitre 6,

- et enfin le 7^{ème} chapitre propose des pistes possibles pour l'extension de ce schéma aux cas des impacts multiples.

Les chapitres 8 à 9 correspondent à la seconde partie du mémoire axée sur l'étude du double impact d'un robot bipède plan.

- le chapitre 8 présente la problématique de la marche en double support,
- le chapitre 9 propose une nouvelle approche pour caractériser l'évolution du bipède lors de l'impact, ainsi qu'une application au robot Rabbit.

Enfin nous présentons les conclusions de ce travail ainsi que les perspectives.

Chapitre 1

Quelques rappels sur la mécanique non régulière

Ce premier chapitre présente les bases de la mécanique non-régulière utiles pour cette thèse. Après avoir présenté la dynamique ainsi que les lois d'impact présentes dans la littérature, nous introduirons les choix retenus pour la suite sur l'exemple simple d'une bille.

1.1 Introduction

Notre étude porte sur le contrôle de systèmes mécaniques Lagrangiens soumis à des contraintes unilatérales sans frottement. La dynamique d'un système Lagrangien peut s'écrire sous la forme suivante :

$$M(X)\ddot{X} + N(X,\dot{X}) = U \quad (1.1)$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de coordonnées généralisées, $M(X) = M^T(X) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'inertie, $N(X,\dot{X})$ contient les effets de Coriolis, centripètes et les forces conservatrices, U représente la commande [Canudas-de-Wit *et al.*, 1996, section 1.2.1].

Ce système est contraint d'évoluer dans un certain domaine Φ de l'espace de configuration. Cette contrainte d'évolution peut être modélisée par une série de contraintes unilatérales sur la position du système :

$$F(X) \geq 0, X \in \mathbb{R}^n, F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \quad (1.2)$$

où $F(X)$ représente en quelque sorte la "distance" entre le système et le bord de Φ . $\dim(X) = n$ est le nombre de degré de liberté du système, $\dim(F(X)) = m$ correspond au nombre de contraintes unilatérales.

La dynamique du système contraint est décrite par :

$$\begin{cases} M(X)\ddot{X} + N(X,\dot{X}) = U \\ F(X) \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

L'équation (1.2) traduit le fait que les différents corps qui composent le système ne peuvent pas s'interpénétrer. L'équation (1.1) décrit l'évolution du système *libre*, c'est à dire lorsque $F(X) > 0$. Pour décrire l'évolution du système lorsqu'une des contraintes est active, on introduit des multiplicateurs de Lagrange dans la dynamique *contrainte* du système. Les

multiplicateurs λ_n traduisent l'effort de réaction entre deux corps lorsqu'il y a contact. La dynamique (1.3) du système devient :

$$\begin{cases} M(X)\ddot{X} + N(X, \dot{X}) = U + \nabla F(X)\lambda_n \\ F(X) \geq 0 \\ \lambda_n \geq 0 \\ F(X)^T \lambda_n = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

où $\nabla F(X)$ correspond au gradient de $F(X)$. Cela traduit que la force de réaction est toujours normale à la surface de contact (en l'absence de frottements) dans le cas d'un contact avec une seule contrainte. Dans le cas d'un contact avec plusieurs contraintes, l'opposé de la force de réaction se trouve dans le cône normal¹ (i.e. $-\nabla F(X)\lambda_n \in N_{\Phi}(X)$).

L'inégalité $\lambda_n \geq 0$ dans (1.4) traduit le fait que la force de contact est **unilatérale**, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'effort de collage ou d'adhésion entre les corps en contact. On ne modélise que des efforts de réaction.

La relation de **complémentarité** $\lambda_n^T F(X) = 0$ dans (1.4) traduit le fait qu'il n'y a pas d'effort à distance (i.e. gravitation, force électromagnétique etc.) entre les différents corps du système.

Les contraintes unilatérales et la relation de complémentarité précédentes peuvent se mettre sous une forme plus compacte :

$$\begin{cases} M(X)\ddot{X} + N(X, \dot{X}) = U + \nabla F(X)\lambda_n \\ 0 \leq F(X) \perp \lambda_n \geq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

L'ensemble d'équations différentielles et algébriques de (1.5) permet de modéliser l'évolution du système en régime *libre* (lorsque aucune contrainte n'est active) et en régime *complètement contraint* (lorsqu'une ou plusieurs contraintes sont actives). Il reste à décrire le comportement du système lors de la transition entre ces deux modes :

La transition se fait lorsque le système atteint la surface d'une contrainte. Pour maintenir le système à l'intérieur de son domaine d'évolution Φ (pour qu'il n'y ait pas d'interpénétration de solides l'un dans l'autre), il se produit une discontinuité de la vitesse. Cette discontinuité est décrite dans le modèle dynamique par une loi d'impact² qui relie les vitesses post impact aux vitesses pre impact (i.e. $\dot{X}(t_k^+) = f(X(t_k^-), \dot{X}(t_k^-))$).

Un modèle dynamique complet d'un système Lagrangien soumis à des contraintes unilatérales sans frottement à la forme suivante :

$$\begin{cases} M(X)\ddot{X} + N(X, \dot{X}) = U + \nabla F(X)\lambda_n \\ 0 \leq F(X) \perp \lambda_n \geq 0 \\ \text{loi de choc} \end{cases} \quad (1.6)$$

1. le cône normal N_{Φ} est décrit sur la figure 1.2

2. La loi d'impact est aussi nommée par la suite "loi de choc" ou "loi de restitution"

Ce type de modèle permet de décrire des systèmes aussi divers que des robots marcheurs [Hurmuzlu *et al.*, 2004], des jongleurs [Zavala-Rio & Brogliato, 1999], des systèmes avec jeux que des systèmes aéronautiques [Avila-Vilchis *et al.*, 2003].

Dans les sections suivantes nous allons définir de façon plus précise les notions de domaine admissible Φ , de lois d'impact et de l'influence des contraintes unilatérales pour la commande.

1.1.1 Domaine admissible

Le domaine admissible Φ est l'ensemble fermé de l'espace de configuration dans lequel le système peut évoluer, i.e.

$$\Phi = \{X | F(X) \geq 0\} = \bigcap_{1 \leq i \leq m} \Phi_i, \quad \Phi_i = \{X | F_i(X) \geq 0\}, \quad F_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

Où les fonctions $F_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles C^1 . Pour des raisons évidentes, nous supposons que $\Phi \neq \emptyset$, afin de ne pas obtenir d'incohérence dans le modèle. Le bord de Φ est noté $\partial\Phi$.

Définition 1 (Singularité) : Une singularité de $\partial\Phi$ est l'intersection de deux (ou plusieurs) surfaces $\Sigma_i = \{X | F_i(X) = 0\}$. Une singularité est dite de co-dimension α lorsqu'elle est l'intersection de α surfaces Σ_i .

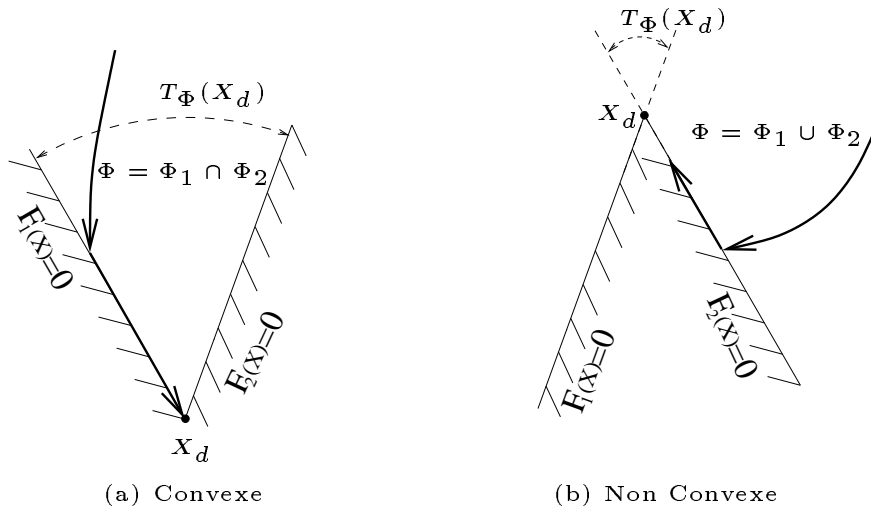


FIG. 1.1 – Points non différentiables

Dans les chapitres suivant nous nous intéresserons au problème du contrôle qui stabilise un système dynamique sur la surface $\partial\Phi$. Dans le cas où $m \geq 2$, le système risque de rencontrer

une singularité de la frontière $\partial\Phi$ (i.e. une surface de codimension $\alpha \geq 2$). Dans notre étude nous ne considérons que des espaces admissibles qui contiennent des singularités convexes (voir figure 1.1.a).

Une contrainte unilatérale se caractérise par la relation $F(X) \geq 0$, qui peut s'exprimer localement par : $CX + D \geq 0$ où C et D sont deux matrices. Clairement l'exemple non-convexe de la figure 1.1.(b) ne peut pas s'exprimer sous la forme d'une intersection de deux domaines convexes Φ_i . Cette configuration non convexe est nommé "reentrant corners" dans la littérature [Glocker, 2001] [Frémond, 2002]. Le fait de se restreindre à des singularités convexes, ne veut pas dire que l'espace admissible tout entier doit être convexe : Par exemple le domaine de la figure 1.2 est non convexe, mais il peut quand même être exprimé sous la forme de Φ . Un tel domaine est dit *régulier* [Clarke, 1990]. Un ensemble est régulier si il est localement convexe.

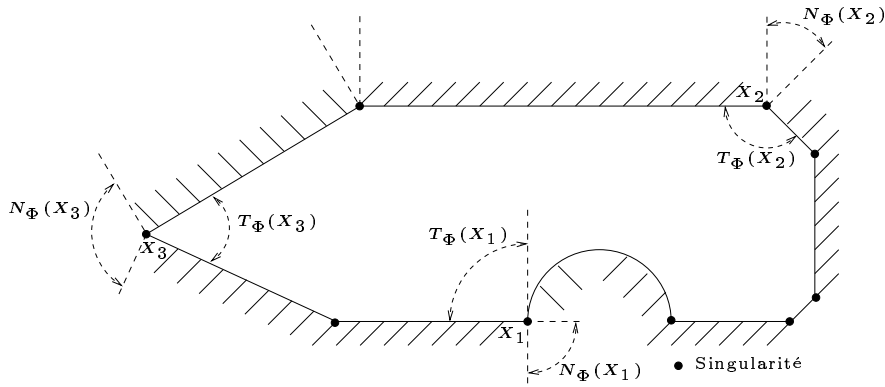


FIG. 1.2 – Exemple d'un domaine non-convexe régulier

1.2 Loi de chocs

On a vu dans le paragraphe d'introduction qu'une loi de choc est nécessaire pour intégrer la dynamique (1.6), et pour garder le système dans le domaine Φ . Nous allons exposer ici quelques lois de restitution.

1.2.1 Loi unidimensionnelle

La loi de Newton est caractérisée par un coefficient de restitution (noté e_n), qui relie les vitesses pre et post impact des deux corps qui se choquent. Soit la définition suivante du coefficient de restitution :

$$e_n = \frac{v_1(t_k^+) - v_2(t_k^+)}{v_1(t_k^-) - v_2(t_k^-)} \quad (1.7)$$

où t_k représente l'instant de l'impact, $v_1(\cdot)$ et $v_2(\cdot)$ représentent respectivement les vitesses des corps 1 et 2.

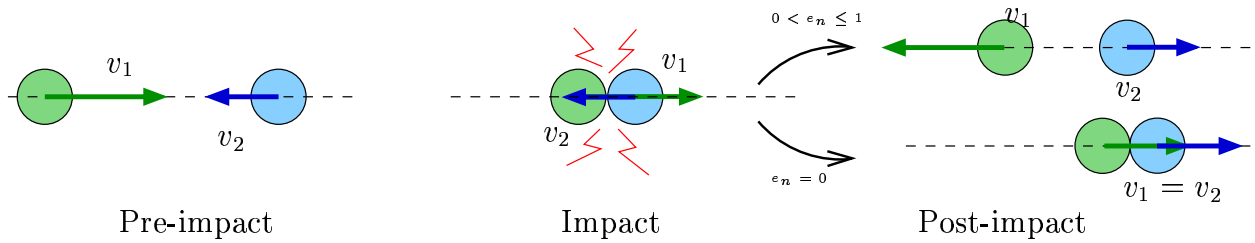


FIG. 1.3 – *Impact unidimensionnel*

Si $e_n = 0$, le choc est dit plastique, et les deux corps restent collés l'un à l'autre après l'impact. Si $e_n = 1$, le choc est dit élastique, il n'y a pas de perte d'énergie cinétique (voir l'équation (1.13)).

Dans le cas d'un système contraint à évoluer dans un certain espace (i.e. le cas d'une contrainte unilatérale), un des deux solides mis en jeu est fixe (i.e. un mur, le sol, un obstacle etc.), la loi de Newton se transforme en :

$$v_1(t_k^+) = -e_n v_1(t_k^-) \quad (1.8)$$

dans le cas des systèmes à 1 degré de liberté.

Pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté on prend :

$$\dot{X}_n(t_k^+) = -e_n \dot{X}_n(t_k^-) , e_n \in [0,1] \quad (1.9)$$

où $\dot{X}_n(\cdot)$ correspond à la composante normale de $\dot{X}(\cdot)$ dans la métrique cinétique associé à $M(X)$. L'équation (1.9) peut se réécrire [Brogliato, 1999, section 6.2] :

$$\dot{X}(t_k^+)^T \nabla F(X) = -e_n \dot{X}(t_k^-)^T \nabla F(X) \quad (1.10)$$

1.2.2 Loi multidimensionnelle

Loi de Moreau

Nous allons présenter dans cette section la loi d'impact multiple de [Moreau, 1988], c'est-à-dire la loi suivante :

$$\dot{X}(t_k^+) = -e_n \dot{X}(t_k^-) + (1 + e_n) \arg \min_{z \in T_\Phi(X(t_k))} \frac{1}{2} [z - \dot{X}(t_k^-)]^T M(X(t_k)) [z - \dot{X}(t_k^-)] \quad (1.11)$$

où $\dot{X}(t_k^+)$ représente la vitesse post-impact, $\dot{X}(t_k^-)$ représente la vitesse pre-impact, $T_\Phi(X(t))$ est le cône tangent au point $X(t)$ de l'espace Φ (voir les figures 1.1 et 1.2 où X et $T_\Phi(X)$ sont décrits), e_n représente le coefficient de restitution, $e_n \in [0,1]$.

Remarquons que si l'angle $(\widehat{\Sigma_1, \Sigma_2}) \leq \pi$ alors dans un voisinage de X on a $\Phi \approx T_\Phi(X)$ lorsque $X \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Le cône tangent est défini comme le cône polaire au cône normal $N_\Phi(X(t))$, voir [Clarke, 1990] [Hiriart-Urruty & Lemaréchal, 1996] [Moreau, 1988]. Ces deux cônes sont des ensembles convexes. Ils sont une généralisation des sous-espaces tangents et normaux de l'espace de configuration qui contiennent respectivement les vitesses et les efforts de contact dans le cas des systèmes à contraintes bilatérales.

Lorsque $m = 1$, la loi de Moreau en (1.11) est identique à la loi de Newton $\dot{X}_n(t_k^+) = -e_n \dot{X}_n(t_k^-)$ (voir équation (1.9)), où \dot{X}_n correspond à la composante normale de la vitesse.

La loi de choc (1.11) peut être réécrite comme [Mabrouk, 1998] :

$$\dot{X}(t_k^+) = \dot{X}(t_k^-) - (1 + e_n) \text{prox}_{M(X(t_k))} [M^{-1}(X(t_k)) N_\Phi(X(t_k)); \dot{X}(t_k^-)] \quad (1.12)$$

où $\text{prox}_{M(X(t_k))}$ correspond au point "proximal" dans la métrique définie par l'énergie cinétique à l'instant t_k , $N_\Phi(X(t_k))$ est le cône normal de Φ en $X(t_k)$. Cette forme de la loi de restitution (1.12) sera utile pour quelques calculs dans les preuves de stabilité. Il peut être intéressant de voir [Glocker, 2002] pour une interprétation géométrique de cette loi.

D'après [Mabrouk, 1998], on montre que la loi de restitution (1.11) implique une perte d'énergie cinétique à chaque instant d'impact :

$$T_L(t_k) = -\frac{1}{2} \frac{1 - e_n}{1 + e_n} \left[\dot{X}(t_k^+) - \dot{X}(t_k^-) \right]^T M(q(t_k)) \left[\dot{X}(t_k^+) - \dot{X}(t_k^-) \right] \leq 0 \quad (1.13)$$

Le choix de cette loi pour le reste de l'étude est complètement arbitraire, et comme nous allons le voir par la suite d'autres lois existent. La loi d'impact de Moreau est utilisée ici car elle est mathématiquement intéressante, elle est solvable numériquement, puisqu'elle est basée sur le principe de Gauss [Brogliato *et al.*, 2002], et enfin parce que c'est l'extension directe de la loi de Newton au cas des impacts multiples (tant que l'on ne tient pas compte des frottements).

Loi de Pfeiffer et Glocker

La loi de [Pfeiffer & Glocker, 1996] est basée sur une décomposition de l'impact en deux phases :

- une phase de compression $[T_A, T_C]$.
- une phase d'expansion $[T_C, T_E]$.

Ces deux phases sont considérées comme instantanées, si bien que :

$$T_A \equiv t_k^- \text{ et } T_E \equiv t_k^+$$

Cette décomposition en deux phases nécessite la résolution des systèmes pour la phase de compression et d'expansion.

$$\begin{cases} M(\dot{q}_C - \dot{q}_A) = (W_N W_T) \begin{pmatrix} \Lambda_{NC} \\ \Lambda_{TC} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{g}_{NC} \\ \dot{g}_{TC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{W}_N^T \\ \dot{W}_T^T \end{pmatrix} (\dot{q}_C - \dot{q}_A) + \begin{pmatrix} \dot{g}_{NA} \\ \dot{g}_{TA} \end{pmatrix} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} M(\dot{q}_E - \dot{q}_C) = (W_N W_T) \begin{pmatrix} \Lambda_{NE} \\ \Lambda_{TE} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{g}_{NE} \\ \dot{g}_{TE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{W}_N^T \\ \dot{W}_T^T \end{pmatrix} (\dot{q}_E - \dot{q}_C) + \begin{pmatrix} \dot{g}_{NC} \\ \dot{g}_{TC} \end{pmatrix} \end{cases}$$

où q_i correspond à l'état du système à l'instant T_i , Λ représente des forces impulsionnelles, \dot{g} la vitesse relative au niveau de la contrainte considérée. Les indices N et T correspondent aux composantes normales et tangentielles. La résolution de cette loi d'impact se fait en résolvant deux LCP³ [Pfeiffer & Glocker, 1996, section 8.8]. Alors que les lois précédentes sont caractérisées par un coefficient de Newton ($e_n = -v(t_k^+)/v(t_k^-)$) sur les vitesses, cette loi est caractérisée par un coefficient de Poisson ($e_p = \Lambda_{NE}/\Lambda_{NC}$) sur les impulsions. Dans le cas sans frottement qui nous intéresse dans cette étude, cette loi basée sur un coefficient de Poisson est équivalente à la loi de Newton [Pfeiffer & Glocker, 1996, section 8.6].

1.2.3 Existence et unicité des solutions

Dans la suite des travaux nous utiliserons la loi de Moreau (1.11) comme loi de restitution. Cette loi associée au système (1.6) définit complètement le système dynamique. Nous allons voir quels sont les principaux résultats présents dans la littérature sur l'existence et l'unicité des solutions.

Les résultats les plus généraux sur l'existence et l'unicité des solutions pour des systèmes tels que dans (1.6) peuvent être trouvés dans [Ballard, 2000] et [Ballard, 2001].

La solution de (1.6) existe et est unique si toutes les données entrant dans (1.6) sont analytiques par morceaux. Alors $X(\cdot)$ est absolument continue et $\dot{X}(\cdot)$ est une fonction à variations bornées continue à droite. Dans ce cas l'accélération est une mesure, ainsi que les multiplicateurs λ_X . Nous allons toujours supposer que ces conditions sont vérifiées dans cette étude. Généralement les impacts multiples (voir les définitions 1 et 5) rendent les solutions discontinues par rapport au conditions initiales ($X(0), \dot{X}(0^+)$), sauf dans certains cas particuliers :

- impacts plastiques avec un angle cinétique⁴ entre les contraintes inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ [Paoli, 2002],
- impacts avec un angle cinétique entre les deux surfaces de contraintes égal à $\frac{\pi}{2}$ [Ballard, 2000]).

3. Linear Complementarity Problem, voir annexe C.

4. On reviendra sur la notion d'angle cinétique à la page 75.

Lorsque $m = 1$ (une seule contrainte), les solutions sont toujours uniques quel que soit le coefficient de restitution e_n [Schatzman, 1998].

Puisque les vitesses peuvent être discontinues, mais que leurs limites à droite existent toujours, les systèmes tels que ceux décrits par (1.6) sont dits *prospectifs*, car lors de leur intégration on cherche à connaître $\dot{X}(t^+)$ [Moreau, 2003].

1.3 Les impacts : Perturbation ou bénéfique pour la stabilisation ?

Généralement en commande de systèmes dynamiques, les impacts sont considérés comme une perturbation, et un contrôleur tente de stabiliser le système contrôlé sans que l'influence des impacts ne soit prise en considération, ni dans la conception de la loi de commande, ni dans l'analyse de stabilité. Dans certains cas la présence d'une contrainte unilatérale (et donc possiblement d'impact) n'est pas forcément néfaste à l'atteinte d'une position d'équilibre. Par exemple, on regarde le cas à un degré de liberté d'une bille de masse unitaire qui se déplace suivant l'axe Oz soumis à son propre poids. Si on lâche la bille à une altitude ($z_0 > 0$) avec une vitesse nulle ($\dot{z}_0 = 0$), on obtient le mouvement suivant :

$$\ddot{z} = -g, \quad \dot{z} = -gt, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 \quad (1.14)$$

La bille tombe indéfiniment sans que le système ne trouve une position d'équilibre (figure 1.4.(a)).

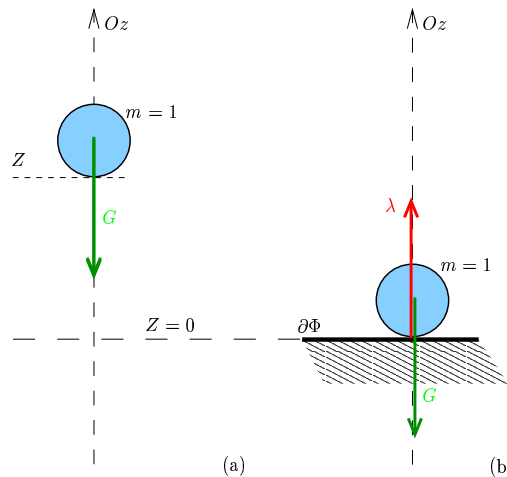


FIG. 1.4 – *Système libre vs. Système contraint*

Considérons maintenant le même système avec un sol à l'altitude $z_c = 0$. Ceci revient à

rajouter à la dynamique de la bille une contrainte unilatérale et une loi d'impact, pour ce cas unidimensionnel on choisit la loi de Newton, d'où la dynamique de la bille :

$$\begin{cases} \ddot{z} = -g + \lambda \\ 0 \leq z \perp \lambda \geq 0 \\ \dot{z}(t_k^+) = -e_n \dot{z}(t_k^-) \end{cases} \quad (1.15)$$

Si $e_n < 1$, la bille soumise à son seul poids se stabilise sur la surface $z = 0$. Le système finit toujours par trouver une position d'équilibre quelle que soit la position de la contrainte z_c (tant que $z_c \leq z_0$ bien sûr) et quelle que soit la valeur du coefficient de restitution $0 \leq e_n < 1$. A l'équilibre on a $\ddot{z} = \dot{z} = z = 0$, et $\lambda = g$.

Cette constatation est importante car dans la partie I nous allons proposer une stratégie de commande pour un système mécanique soumis à des contraintes unilatérales. La stratégie que nous proposons ne nécessite pas la connaissance du coefficient de restitution, et est très robuste vis-à-vis de la connaissance de la position de la contrainte. Tout cela parce que la loi de commande tente de recréer une sorte de "gravité virtuelle" en direction de la contrainte choisie. (voir détail dans la partie I).

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, à chaque instant d'impact il se produit une perte d'énergie cinétique si $e_n < 1$ (voir l'équation (1.13)). Si d'autre part on étudie la stabilité de notre système dynamique à l'aide d'une fonction de Lyapunov, et si cette fonction est choisie assez proche de l'énergie totale du système, alors la perte d'énergie cinétique à chaque impact peut avoir une influence bénéfique sur la stabilisation du système. C'est ce que nous verrons dans les chapitres 5.1 et 5.2.

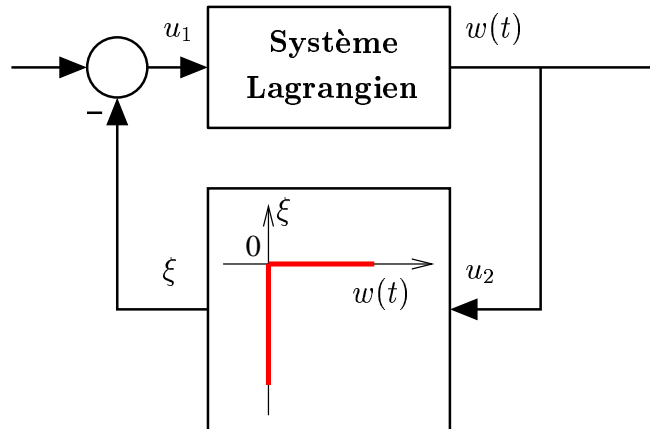


FIG. 1.5 – *Système Lagrangien contraint*

D'après [Brogliato, 2004], le système (1.4) couplé à la loi (1.11) peut se mettre sous la forme de deux blocs dissipatifs (tel que sur la figure 1.5). Ce système possède un point d'équi-

libre stable au sens de Lyapunov si son énergie potentielle $U(q)$ possède un minimum strict dans Φ (c'est l'extension du théorème de Lagrange-Dirichlet au cas non régulier).

Ces deux remarques nous permettent de définir deux orientations utilisées par la suite pour faire de la poursuite de trajectoire.

- 1 - Les commandes utilisées pour faire de la poursuite de trajectoires pour des systèmes mécaniques non-réguliers seront basées sur la passivité.
- 2 - Les trajectoires de références de ces contrôleurs seront choisies dans le but de simuler une "gravité virtuelle" en direction de la contrainte où l'on souhaite se stabiliser.

Première partie

Poursuite de trajectoires pour un système mécanique Lagrangien

Cette première partie propose d'étendre l'utilisation de lois de commande initialement prévues pour la poursuite de trajectoires de systèmes réguliers, à des systèmes contraints.

Sommaire

★ **Problématique**

Définitions des trajectoires de référence

★ **Notions de Stabilité**

Définitions et Théorèmes de stabilité adaptés à la mécanique non-régulière

★ **Structure du contrôleur**

Structure du contrôleur basé sur la loi de Paden-Panja

★ **Analyse de stabilité**

Analyse de la loi de Paden-Panja grâce aux notions précédentes

★ **Contrôleur à loi à décroissance exponentielle**

Structure du contrôleur basé sur la loi de Slotine-Li

★ **Simulation**

Résultats numériques sur la convergence des lois proposées

★ **Chocs multiples**

Extensions possibles de ce contrôleur pour des chocs multiples

★ **Conclusion**

Chapitre 2

Introduction - Positionnement du problème

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la poursuite de trajectoires pour des systèmes non réguliers soumis à des contraintes unilatérales sans frottement. On note $X \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de coordonnées généralisées. D'une manière générale le problème de la poursuite de trajectoires est que toutes les trajectoires $X(\cdot)$ doivent converger vers une trajectoire de référence (notée $X_d(\cdot)$). Cette trajectoire de référence est déterminée souvent hors-ligne. Pour obtenir un contrôleur robuste nous utilisons la stabilité du point fixe au sens de Lyapunov. C'est-à-dire que nous nous intéresserons à l'évolution de l'erreur de poursuite $(X - X_d, \dot{X} - \dot{X}_d)$. Le problème de la stabilisation revient à choisir X_d constant. Pour des systèmes mécaniques non-linéaires, le problème de la poursuite de trajectoires est connu pour être plus difficile que celui de la stabilisation [Lozano *et al.*, 2000]). Pour les systèmes non-réguliers, le problème de la stabilisation est étudié dans [Brogliato, 2004], [Goeleven *et al.*, 2003]. Par contre le problème de poursuite pour des systèmes non-réguliers reste encore mal connu [Brogliato *et al.*, 1997], [Brogliato *et al.*, 2000], ainsi que [Menini & Tornambè, 2001] pour le cas particulier où $e_n = 1$. Des applications à la poursuite pour des systèmes non réguliers peuvent être trouvées dans le contrôle de bras manipulateur accomplissant des tâches telles que le polissage ou l'ébavurage [Komanduri, 1993] [Ramachandran *et al.*, 1994], la rectification de surface [Shia *et al.*, 1998], tâches qui sont très importantes dans l'industrie manufacturière [Studny *et al.*, 1999], etc, et plus généralement dans tous les systèmes mécaniques qui effectuent des actions comportant des phases de contact et d'impact.

Le système mécanique non-régulier qui nous intéresse dans ce travail évolue dans trois états différents, chacun de ces états définissant un phase :

- **i)** Une phase de mouvement libre, durant laquelle le système n'est soumis à aucune contrainte ($F(X) > 0$, où $F(\cdot)$ est une fonction qui représente la distance entre le système et la contrainte).
- **ii)** Une phase complètement contrainte, durant laquelle le système est soumis à une contrainte holonome ($F_i(X) = 0$ durant un intervalle de temps non nul, pour un $i \in \{1, \dots, m\}$), et durant laquelle une force de contact non nulle existe entre le système et la contrainte.
- **iii)** Une phase de transition, dont le but est de stabiliser le système sur la surface de la contrainte $\Sigma_i = \{X | F_i(X) = 0\}$, ou bien $\bigcap \Sigma_i$ dans le cas des chocs multiples.

Dans la première phase, le système est décrit par des équations différentielles ordinaires. Dans ce cas, le problème de la poursuite de trajectoires a été résolu par plusieurs contrôleurs qui assurent une stabilité asymptotique globale (retour d'état linéarisant, contrôle adaptatif, contrôle robuste, passivité, etc ...[Lozano *et al.*, 2000])

La seconde phase concerne le contrôle d'une équation algèbre différentielle. Ceci est résolu par l'utilisation de contrôleurs en force/position [McClamroch & Wang, 1988],[Yoshikawa, 1987].

Enfin durant la phase de transition, le système est soumis à des contraintes unilatérales, et des collisions sont possibles. Ces impacts provoquent généralement des rebonds. Ces rebonds sont habituellement considérés comme des perturbations. A l'inverse, dans l'étude qui nous intéresse dans cette première partie, les impacts sont provoqués intentionnellement, pour dissiper de l'énergie (comme vu dans l'équation (1) de la section 1.2.2). Cette dissipation d'énergie permet de contribuer à la stabilisation du système.

Problématique

Le problème qui nous intéresse dans cette partie est donc de concevoir un schéma de commande qui permet de faire du suivi de trajectoire pour un système mécanique évoluant successivement dans les trois phases **i)**, **ii)** et **iii)**.

2.1 Les limites de l'approche tangentielle

Comme souhaité dans l'introduction, nous voulons effectuer une poursuite de trajectoires qui comporte 3 phases distinctes. Nous allons voir quelles sont les conclusions que nous pouvons déduire des trois points **i)**, **ii)** et **iii)** de l'introduction.

Soit $X^{i,nc}(t)$, la trajectoire désirée non contrainte du système, c'est-à-dire la trajectoire naïve que l'on pourrait suivre si on ne tient pas compte des contraintes du système. Nous allons voir dans la section 4.2, comment on peut modifier cette trajectoire naïve $X^{i,nc}(t)$, pour obtenir un contrôleur stable au sens des définitions de stabilité qui seront données dans le chapitre suivant.

Les points **i)** et **ii)** de l'introduction impliquent que la trajectoire non contrainte $X^{i,nc}(\cdot)$ doit avoir une forme générique telle que présentée sur la figure 2.1. Plus exactement c'est l'orbite de cette trajectoire dans l'espace de configuration qui est décrite sur la figure 2.1. Il est clair que le point **ii)** implique que $F(X^{i,nc}(t)) < 0$ lors des phases complètement contraintes, sinon il n'y aurait pas d'effort de contact lors de la poursuite parfaite de la trajectoire désirée. Autrement dit, le système doit avoir tendance à violer les contraintes pour assurer une force de contact non-nulle. De même, le point **i)** impose $F(X^{i,nc}(t)) > 0$ lors des phases de mouvement libre.

Par conséquent il existe un point A dans l'espace de configuration, pour lequel le contact

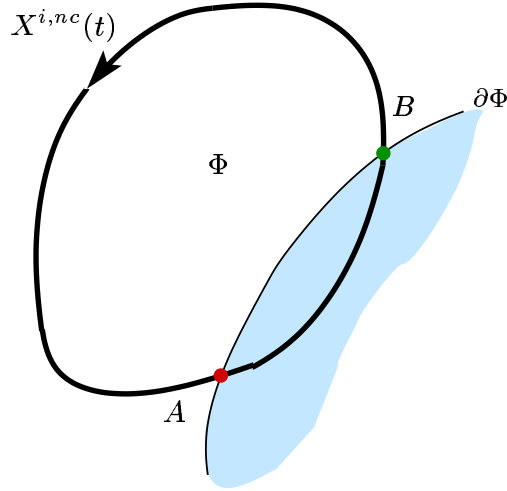


FIG. 2.1 – Trajectoire du système non contraint

est établi sur $\partial\Phi$. Ceci donne lieu à une phase de transition (point **iii**). De même il existe un point B pour lequel $F(X^{i,nc}(t)) = 0$ et le détachement doit être contrôlé par l'intermédiaire d'un LCP.

Le point central de notre étude est la mise au point des ces deux phases de transitions.

Une première idée serait d'imposer une approche tangentielle de la surface: par exemple en choisissant $\nabla F(X_d^*)^T \dot{X}_d^* = 0$, où $X_d^*(\cdot)$ est le signal utilisé en entrée de la commande et servant de trajectoire de référence (la différence entre $X_d^*(\cdot)$ et $X^{i,nc}(\cdot)$ sera éclaircie plus loin). Cependant cette approche a des limites :

- α) Si l'erreur de poursuite initiale est non nulle, i.e. $X(0) - X_d^*(0) \neq 0$, $\dot{X}(0) - \dot{X}_d^*(0) \neq 0$, alors des impacts peuvent avoir lieu.
- β) Ce n'est pas une stratégie très robuste parce qu'une mauvaise estimation de la position de la contrainte peut entraîner qu'il n'y ait pas du tout de stabilisation sur $\partial\Phi$. En conséquence il est préférable d'imposer des collisions sur $\partial\Phi$.
- γ) Dans tout les cas, les collisions (voulues ou non) doivent être incorporées à l'analyse de stabilité.
- δ) Une bonne stratégie pour se stabiliser sur $\partial\Phi$ est d'imposer une dynamique en boucle fermée qui correspond à la dynamique d'un balle qui tombe à terre i.e. $\ddot{X} = -g$, $X \geq 0$:
 - δ_1) Ceci est très robuste vis-à-vis des incertitudes sur la position de la contrainte.
 - δ_2) Comme nous le verrons plus loin, ceci se prête très bien à une étude de la stabilité au sens de Lyapunov pour une certaine section de Poincaré.

Nous verrons dans la section 3, que la stabilité qui nous intéresse est basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov $V(X, \dot{X}, t)$ unique pour toutes les phases. Les points suivants posent quelques problèmes :

- **a)** Il y a des couplages non nuls entre les coordonnées “tangentes” et “normales” dans la matrice d’inertie $M(X)$ (Ceci sera formulé de manière plus rigoureuse par la suite).
- **b)** la fonction $V(X, \dot{X}, t)$ doit être la même pour toutes les phases.
- **c)** Si $V \equiv 0$ alors n’importe quel saut sur la vitesse $\dot{q}(t_k^+) \neq \dot{q}(t_k^-)$ implique un saut positif de la fonction de Lyapunov $V(t_k^+) - V(t_k^-) > 0$. Ceci veut dire que la présence d’impacts exclut généralement une stabilité asymptotique ⁽¹⁾, excepté dans des cas très particuliers sans couplage dans la matrice d’inertie, ce qui simplifie beaucoup de choses.
- **d)** La fonction $V(\cdot)$ doit satisfaire $V(\cdot) = 0$ quand la trajectoire désirée du système en boucle fermée est parfaitement suivie, conformément à la définition d’une fonction de Lyapunov. Ceci implique que la trajectoire désirée du système contraint doit être utilisée dans la définition de $V(\cdot)$.

La stratégie de contrôle que nous proposons doit satisfaire ces différents points. Or nous remarquons que certains d’entre eux sont antagonistes (par exemple **b)** et **c)**). D’un coté nous souhaitons avoir des impacts pour des raisons de robustesse, et de l’autre coté ces mêmes impacts nous empêchent d’avoir une stabilité asymptotique. Une solution serait d’intégrer les rebonds dus aux impacts dans la trajectoire de référence de sorte qu’il n’y ait pas de discontinuité de $V(t_k)$ aux instants d’impact. Mais cette solution n’est pas bonne, car elle nécessite une bonne connaissance du coefficient de restitution e_n et des instants d’impact.

2.2 Dynamique

Les systèmes étudiés dans ce chapitre sont des systèmes Lagrangiens de complémentarité, avec une fonction Lagrangienne $\mathcal{L} = T(X, \dot{X}) - U(X)$, où $T(X, \dot{X}) = \frac{1}{2} \dot{X}^T M(X) \dot{X}$ représente l’énergie cinétique, $U(X)$ représente l’énergie potentielle. La dynamique du système peut s’écrire sous la forme :

$$\begin{cases} M(X)\ddot{X} + C(X, \dot{X})\dot{X} + G(X) = U + \nabla F(X)\lambda_X \\ F(X) \geq 0, \quad F(X)^T \lambda_X = 0, \quad \lambda_X \geq 0 \\ \text{Loi de choc} \end{cases} \quad (2.1)$$

où $X \in \mathbb{R}$, $M(X) = M^T(X) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d’inertie, $F(X) \in \mathbb{R}^m$ représente la distance entre le système et la surface de la contrainte, $\lambda_X \in \mathbb{R}^m$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte, $U \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur généralisé de la commande, $C(X, \dot{X})$ représente la matrice des effets de Coriolis et centripètes, $G(X)$ contient les

1. Ceci est surtout dû au fait que les contrôleurs utilisés pour les phases libres et complètement contraintes assurent une convergence asymptotique de l’erreur de poursuite vers zéro, mais ne possèdent pas de propriétés de convergence en temps fini.

Le contrôle de systèmes effectuant une tâche de ce type présente deux difficultés majeures.

- L'instant du premier impact sur $\partial\Phi$ n'est pas connu, ainsi que l'instant de stabilisation sur $\partial\Phi$.
- L'instant du décollage n'est pas connu non plus,

sauf pour le cas très particulier à un degré de liberté, où il est possible de déterminer analytiquement ces deux instants.

De plus choisir une loi de commande dont la boucle fermée avec (2.1) est stable dans le cas non-contraint et dans le cas complètement contraint, n'implique pas la stabilité sur (2.3).

Cette succession infinie de phases libres et de phases de contact est le problème de poursuite de trajectoires le plus difficile à traiter. En effet l'analyse de stabilité devra être faite à deux niveaux :

- au **niveau continu**; on montre que l'état du système tend vers la trajectoire de référence.
- au **niveau événements discrets**; on doit s'assurer de la convergence des solutions au cours des cycles k_{cyc} .

Dans la section suivante nous allons définir les différentes trajectoires de références qui nous seront utiles pour le contrôleur et pour l'analyse de stabilité de ce contrôleur.

2.5 Les différentes trajectoires de références

Nous définissons les 4 trajectoires de références suivantes :

- $X^{i,nc}$, la trajectoire du système en boucle fermée si on ne tient pas compte des contraintes,
- $X^{i,c}$, la trajectoire désirée du système en boucle fermée que l'on souhaite obtenir lorsque l'erreur de poursuite est nulle (lorsque k_{cyc} tends vers l'infini). C'est la trajectoire vers laquelle le système va tendre au cours des cycle k_{cyc} . C'est une trajectoire sans impact.
- X_d^* la trajectoire de référence utilisée par la loi de commande. C'est la trajectoire qui impose une dynamique proche de celle de la balle qui rebondit par terre (voir point δ)
- X_d la trajectoire de référence utilisée dans la fonction de Lyapunov.

Pour clarifier les différences entre ces trajectoires de références nous allons voir un petit exemple à un degré de liberté. Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} (\ddot{X} - \ddot{X}_d^*) + \gamma_2(\dot{X} - \dot{X}_d^*) + \gamma_1(X - X_d^*) = \lambda \\ 0 \leq X \leq \lambda \geq 0 \\ \dot{X}(t_k^+) = -e_n \dot{X}(t_k^-) \end{cases} \quad (2.4)$$

où $X_d^*(\cdot)$ est une fonction deux fois dérivable, $\gamma_2 > 0$ et $\gamma_1 > 0$ deux gains. Le vecteur λ représente le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $X \geq 0$. Ce système représente la dynamique d'une masse unitaire contrainte à se déplacer sur l'axe Ox , et demeurant dans le

demi-plan $X \geq 0$ donc de dynamique $\ddot{X} = U + \lambda$, bouclée avec la commande $U = \ddot{X}_d^* - \gamma_1(X - X_d^*) - \gamma_2(\dot{X} - \dot{X}_d^*)$ (voir la figure 2.2). On associe a ce système une fonction de Lyapunov ($V(t, \tilde{X})$) fonction quadratique de l'erreur de poursuite.

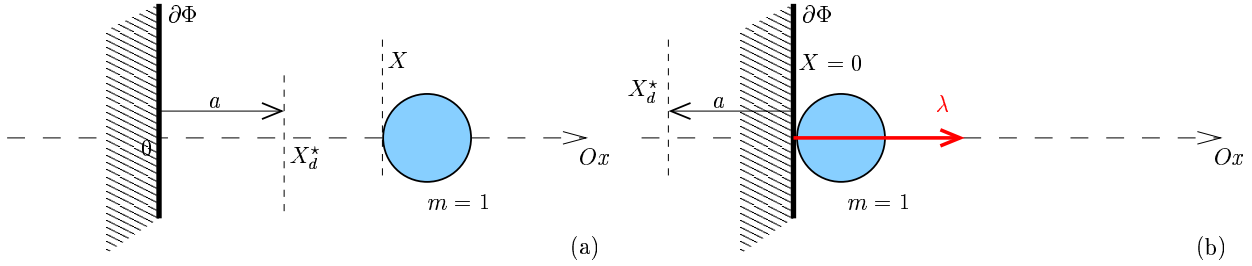


FIG. 2.2 – Exemple à 1 degré de liberté

Pour simplifier les choses nous allons simplement étudier le cas de la régulation ($\ddot{X}_d^* = \dot{X}_d^* = 0$)

Cas libre - (figure 2.2.a)

Commençons par le cas libre, c'est-à-dire que $X_d^* > 0$. Lorsque le système a atteint son point d'équilibre ($X = X_d^*$, $\dot{X} = 0$, $\ddot{X} = 0$), la fonction de Lyapunov vaut zéro. Et il n'est pas nécessaire de différencier X_d^* de X_d . En effet nous avons $X_d^*(\cdot) = X_d(\cdot) = X^{i,nc}(\cdot) = X^{i,c}(\cdot)$ pour un système libre.

Cas contraint - (figure 2.2.b)

On veut se stabiliser sur la surface $\partial\Phi$ de la contrainte. On a deux solutions :

[1^{ère} solution] on fixe $X_d^* = 0$

Dans ce cas une fois que le système a atteint son point d'équilibre, on a bien $\ddot{X}_d^* = \dot{X}_d^* = X_d^* = 0$. Par contre d'après l'équation (2.4), la force de contact vaut $\lambda = 0$, et on ne respecte pas le point **ii**).

[2^{ème} solution] on fixe $X_d^* < -a$, où a est une constante positive.

Dans ce cas lorsque le système se trouve sur $\partial\Phi$, l'erreur en position vaut $\bar{X} = X - X_d^* = -X_d^* > 0$. Or nous étudions la stabilité de notre système à l'aide d'une fonction de Lyapunov. D'après le point **d**), on doit avoir $V(t, \bar{X} = 0) = 0$ lorsque la trajectoire est parfaitement suivie. On ne peut donc pas utiliser cette erreur \bar{X} dans la définition de la fonction de Lyapunov $V(t, \bar{X} = 0)$.

Ici notre système a atteint sa position désirée lorsque $X = 0$. On note X_d cette trajectoire désirée, et $\tilde{X} = X - X_d$ correspond à l'erreur de position utilisée dans la fonction de Lyapunov pour l'étude de stabilité.

En résumé, lorsque le système a atteint sa position d'équilibre sur $\partial\Phi$, on a :

- $X_d = 0$, $X_d^* = -a$, d'où $\tilde{X} = 0$ et $\tilde{X} = a$
- la fonction de Lyapunov vaut $V(t, \tilde{X} = 0) = 0$,
- l'équation (2.4) donne la valeur de la réaction $\lambda = -\gamma_1 X_d^* = \gamma_1 a > 0$.

On remarque que la valeur de la trajectoire désirée X_d^* permet de fixer la valeur de la réaction λ . Plus la trajectoire désirée pénètre la contrainte plus la force de réaction est importante. Le problème du contrôle dans les phases $\Omega_{2k_{cyc}+1}$ peut être vu comme un simple problème de contrôle en position. Mais pour des raisons de facilité d'implémentation, ce problème sera vu dans le chapitre 4 comme un problème de contrôle en force/position. En effet une boucle de contrôle indépendante fixera la force de réaction à la valeur souhaitée (voir figure 4.1).

Revenons à l'étude d'un mouvement plus général comportant des phases libres et des phases de contact tel que celui décrit sur la figure 2.1. Nous avons donc besoin de définir quatre trajectoires pour l'étude de tels systèmes :

La trajectoire invariante non contrainte $X^{i,nc}$, définie plus précisément sur la figure 2.3.b, est la trajectoire qu'il faudrait appliquer en entrée de la commande si le suivi de trajectoire était parfait ($V(t,0) = 0$). Le contact se fait tangent en A'' , et le saut en B correspond à l'application d'un contrôle en force.

Or nous avons vu dans les points précédents que l'approche tangentielle n'est pas souhaitable lorsque la poursuite n'est pas parfaite ($V(t, \tilde{X}) > 0$). Le point δ) nous propose même d'utiliser une stratégie qui tend à imposer une dynamique qui ressemble à celle de la balle qui tombe à terre. C'est pourquoi la trajectoire désirée X_d^* viole la contrainte entre A' et B'' (voir figure 2.3.(a)) lorsque la poursuite n'est pas parfaite.

Nous avons vu dans le petit exemple précédent que pour un système soumis à une contrainte unilatérale, le signal d'entrée de la commande et le signal utilisé par la fonction de Lyapunov ne pouvaient pas être identiques. On visualise X_d sur la figure 2.3.(c), $X_d(t)$ est tel que $X_d(t) \in \partial\Phi$ lorsque $X_d^*(t)$ viole la contrainte et $X_d(t) \equiv X_d^*(t)$ sinon.

L'orbite de X_d^* tend à violer la contrainte entre A' et B'' lorsque la poursuite n'est pas parfaite pour des raisons de robustesse(cf point β). Néanmoins pour pouvoir obtenir une stabilité asymptotique (cf point \mathbf{c}) il faut aussi que la trajectoire de référence soit sans impact lorsque la poursuite est parfaite ($V(t, \tilde{X}(t)) = 0$). Donc au cours des cycles k_{cyc} , il faut que le point B' tende vers le point A'' . La profondeur vers laquelle X_d^* viole la contrainte doit donc être fonction de l'erreur de poursuite (donc par exemple fonction de $V(t, \tilde{X}(t))$). Ce qui fait que la trajectoire de commande X_d^* tend vers la trajectoire invariante non-contrainte $X^{i,nc}$. De même la trajectoire X_d utilisée par la fonction de Lyapunov tend vers une trajectoire invariante notée $X^{i,c}$, qui est la trajectoire invariante du système contraint en boucle fermée.

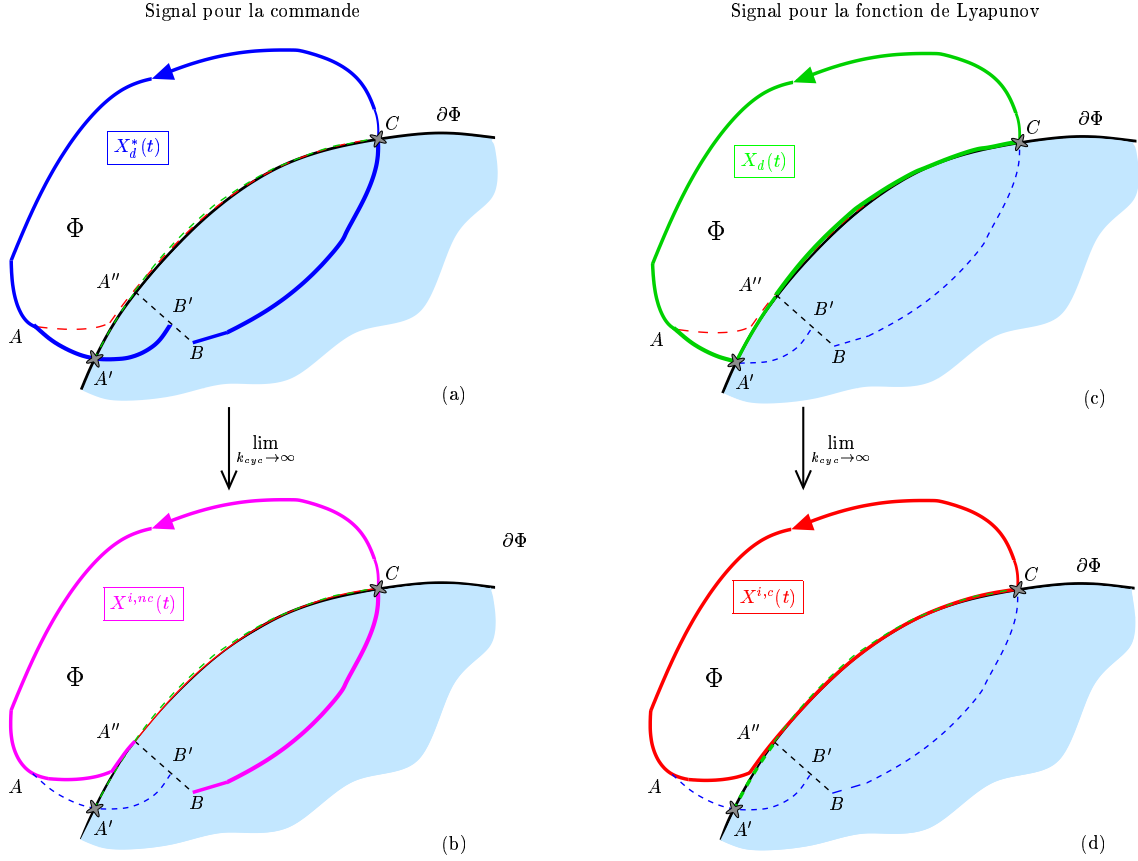


FIG. 2.3 – Les différentes trajectoires de références

Remarque 1 : Sur la figure 2.3 on retrouve bien le double aspect de convergence continue et évènements discrets dont on parlait précédemment. Le contrôleur doit faire en sorte que l'état tende vers $X_d(t)$ (figure 2.3(c)) sur un cycle, tout en assurant que $X_d(t)$ tende vers $X^{i,c}(t)$ (figure 2.3(d)) au cours des cycles.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les bases de la poursuite de trajectoires que nous voulons réaliser pour des systèmes mécaniques non-réguliers. Avant de proposer un schéma de commande dans le chapitre 4, nous allons présenter dans le chapitre suivant le cadre de référence qui nous permettra d'analyser la stabilité de tels systèmes.

Chapitre 3

Notions de stabilité adaptées aux systèmes mécaniques non réguliers

Avant de définir la structure de notre contrôleur, nous allons poser les bases qui nous permettront de faire l'analyse de stabilité de notre système en boucle fermée. Les propositions relatives à la stabilité faible (proposition 1) et à la stabilité forte (proposition 3) sont tirées de [Brogliato *et al.*, 1997]. Dans cette thèse nous proposons des résultats pour des lois exponentielles (proposition 2) ainsi que la proposition 4.

3.1 Définitions de la stabilité

Dans les définitions de stabilité suivantes, on note $x(\cdot)$ l'état du système en boucle fermée. On note par Ω l'union de toutes les phases $\Omega_{2k_{cyc}}$ et $\Omega_{2k_{cyc}+1}$, c'est-à-dire que Ω représente les phases pendant lesquelles aucun impact n'est prévu.

3.1.1 Définition de la stabilité faible

Définition 2 (Système faiblement stable sur Ω) : *Le système en boucle fermée est faiblement stable sur Ω si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tel que $\|x(0)\| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t)\| \leq \epsilon$ pour tout $t \geq 0$, $t \in \Omega = \cup_{k_{cyc} \geq 0} \Omega_{k_{cyc}}$. Le système est asymptotiquement faiblement stable si de plus on a $x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, $t \in \Omega$. Le système est pratiquement faiblement stable sur Ω si il existe une boule centrée en $x = 0$, de rayon $R > 0$, et tel que $x(t) \in B(0, R)$ pour tout $t \geq T$; $T < +\infty$, $t \in \Omega$, $R < +\infty$. ■*

3.1.2 Définition de la stabilité forte

Soit l'application de Poincaré des impacts sur la section $\Sigma_{\mathcal{I}}^- = \{x | F_i(X) = 0, \dot{X}^T \nabla F_i(X) < 0, i \in \mathcal{I}\}$ du système en boucle fermée. On voit que $\Sigma_{\mathcal{I}}^-$ est une hypersurface de codimension $\alpha = \text{card}(\mathcal{I})$. On définit :

$$P_{\Sigma_{\mathcal{I}}} : \Sigma_{\mathcal{I}}^- \rightarrow \Sigma_{\mathcal{I}}^- \tag{3.1}$$

$$x_{\Sigma_{\mathcal{I}}}(k) \mapsto x_{\Sigma_{\mathcal{I}}}(k+1).$$

où $x_{\Sigma_{\mathcal{I}}}$ est l'état de $P_{\Sigma_{\mathcal{I}}}$. Introduisons la fonction positive $V(\cdot)$ qui servira par la suite. Soit $V_{\Sigma_{\mathcal{I}}}(\cdot)$ la restriction de $V(\cdot)$ sur $\Sigma_{\mathcal{I}}$.

Définition 3 (Système fortement stable) : *Un système est dit fortement stable si :*

- (i) - *il est faiblement stable sur Ω ,*
- (ii) - *sur les phases $I_{k_{cyc}}$, $V(x(\cdot), \cdot)$ uniformément bornée et $P_{\Sigma_{\mathcal{I}}}$ est stable au sens de Lyapunov avec la fonction de Lyapunov $V_{\Sigma_{\mathcal{I}}}$, et*
- (iii) - *la séquence $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ possède un point d'accumulation $t_{\infty} < +\infty$. t_k représente les instants d'impact.*

■

Clairement $P_{\Sigma_{\mathcal{I}}}$ possède un point fixe $x_{\Sigma_{\mathcal{I}}}^* \in \partial\Phi$.

3.2 Théorème de stabilité

Choisissons $V(\cdot)$ telle que $\beta(\|x\|) \geq V(x, t) \geq \alpha(\|x\|)$, $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$, où $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$ sont deux fonctions strictement croissantes. On note $\tau_0^{k_{cyc}}$ et $t_f^{k_{cyc}}$ les instants correspondant respectivement au début et à la fin de la phase $I_{k_{cyc}}$. On note " $\lambda[a, b]$ " la mesure de Lebesgue de l'intervalle $[a, b]$, et " $\sigma_F(t)$ " le saut de la fonction $F(\cdot)$ discontinue en t .

Proposition 1 (Stabilité faible sur Ω) : *Supposons que le système évolue comme en (2.3), et que*

- (a) - $\lambda[\Omega] = +\infty$,
- (b) - *pour tout $k_{cyc} \in \mathbb{N}$, $\lambda[I_{k_{cyc}}] < +\infty$,*
- (c) - $V(x(t_f^{k_{cyc}}), t_f^{k_{cyc}}) \leq V(x(\tau_0^{k_{cyc}}), \tau_0^{k_{cyc}})$.

Si sur Ω , $\dot{V}(x(t), t) \leq 0$ et $\sigma_V(t_k) \leq 0$ pour tout $k \geq 0$, alors le système en boucle fermée est faiblement stable sur Ω . Si de plus $\dot{V}(x(t), t) \leq -\gamma(\|x(t)\|)$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(\cdot)$ une fonction strictement croissante, alors le système est asymptotiquement faiblement stable sur Ω . ■

La stabilité faible impose que la fonction de Lyapunov soit toujours décroissante sur Ω , par contre elle peut croître temporairement sur les phases d'impact $I_{k_{cyc}}$, sous réserve que le point (c) soit vérifié. (voir figure 3.1.(a)).

La proposition 1 peut être adaptée à d'autres types de mouvements, que ceux décrits par le cycle (2.3), voir [Brogliato *et al.*, 1997]. Supposons que la durée d'accumulation est finie (i.e. $t_{\infty} < +\infty$). On remarque que cela implique d'avoir $e_n < 1$ [Ballard, 2001, proposition 4.11] (puisque si $e_n = 1$, les instants d'impacts sont tels que $t_{k+1} - t_k \geq \beta_k > 0$ avec $\sum_{k \geq 0} \beta_k$ non-bornée, et donc $t_{\infty} = +\infty$).

Proposition 2 (Stabilité faible sur Ω des lois exponentielles) : *Supposons que les points (a) et (b) de la proposition (1) soient vérifiés, et que*

- (a) - *en dehors des phases d'accumulation d'impact $[t_0, t_\infty]$, on ait $\dot{V}(t, x(t)) \leq -\gamma V(t)$ pour un $\gamma > 0$,*
- (b) - *sur les phases $I_{k_{cyc}}$, on ait $V(t_{k+1}^-) - V(t_k^+) \leq 0$, pour tout $k \geq 0$,*
- (c) - *le système est initialisé sur Ω_0 avec $V(\tau_0^0) \leq 1$,*
- (d) - $\sum_{k \geq 0} \sigma_V(t_k) \leq KV^\kappa(\tau_0^{k_{cyc}}) + \epsilon$ *pour $\kappa \geq 0$, $K \geq 0$ et $\epsilon \geq 0$.*

Alors il existe une constante $N < +\infty$ telle que $\lambda[t_\infty^{k_{cyc}}, t_f^{k_{cyc}}] = N$, pour tout $k_{cyc} \geq 0$ (l'indice du cycle), et telle que :

- (i) - *Si $\kappa \geq 1$, $\epsilon = 0$ et $N = \frac{1}{\gamma} \ln(\frac{1+K}{\delta})$ pour $0 < \delta < 1$, alors $V(\tau_0^{k_{cyc}+1}) \leq \delta V(\tau_0^{k_{cyc}})$. Le système est asymptotiquement faiblement stable.*
- (ii) - *Si $\kappa < 1$, alors $V(\tau_0^{k_{cyc}}) \leq \delta(\gamma)$, où $\delta(\gamma)$ est une fonction qui peut être fixée arbitrairement petite en augmentant la valeur de γ . Le système est pratiquement faiblement stable sur Ω avec $R = \alpha^{-1}(\delta(\gamma))$.*

■

Remarquons que la borne supérieure dans (d) est le point clef de l'analyse de stabilité. Cela caractérise l'incertitude qui est permise sur les variations de la fonction $V(t, x(t))$.

Dans les situations où il n'est pas possible de montrer que $V(x(t_f^{k_{cyc}}), t_f^{k_{cyc}}) \leq V(x(\tau_0^{k_{cyc}}), \tau_0^{k_{cyc}})$ et donc d'utiliser le résultat de la proposition 1, on utilise la proposition 2. Dans la proposition 2 on rallonge la phase de stabilisation $I_{k_{cyc}}$ d'une durée $\lambda[t_\infty^{k_{cyc}}, t_f^{k_{cyc}}]$ au moins égal à $N < +\infty$. Le fait d'utiliser une loi à décroissance exponentielle (point (a)) et le fait de majorer les sauts $\sigma_V(t_k)$ nous assure que la durée $\lambda[t_\infty^{k_{cyc}}, t_f^{k_{cyc}}]$ ne croît pas de cycle en cycle.

Preuve

D'après l'hypothèse (a) de la proposition 2, nous avons

$$V(t_f^{k_{cyc}}) \leq V(t_\infty) e^{-\gamma(t_f^{k_{cyc}} - t_\infty)} \quad (3.2)$$

D'après les hypothèses (b) et (d) de la proposition 2, nous avons

$$\begin{aligned} V(t_\infty) &\leq V(\tau_0^{k_{cyc}}) + \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_V(t_k) + \sum_{k=0}^{\infty} V(t_{k+1}^-) - V(t_k^+) \\ &\leq V(\tau_0^{k_{cyc}}) + KV^\kappa(\tau_0^{k_{cyc}}) + \epsilon \end{aligned} \quad (3.3)$$

Les inégalités (3.3) et (3.2) donnent

$$V(t_f^{k_{cyc}}) \leq e^{-\gamma(t_f^{k_{cyc}} - t_\infty)} [V(\tau_0^{k_{cyc}}) + KV^\kappa(\tau_0^{k_{cyc}}) + \epsilon] \quad (3.4)$$

Nous allons maintenant analyser deux cas :

(i) Si $\kappa \geq 1$, alors $V(\tau_0^{k_{cyc}}) \geq V\kappa(\tau_0^{k_{cyc}})$. Si $\epsilon = 0$, l'équation (3.4) devient

$$V(t_f^{k_{cyc}}) \leq e^{-\gamma(t_f^{k_{cyc}} - t_\infty)}(1 + K)V(\tau_0^{k_{cyc}}) \quad (3.5)$$

Si nous voulons avoir $V(t_f^{k_{cyc}}) \leq \delta V(\tau_0^{k_{cyc}})$, nous devons choisir $\lambda[t_f^{k_{cyc}} - t_\infty]$ tel que :

$$e^{-\gamma(t_f^{k_{cyc}} - t_\infty)}(1 + K) \leq \delta \quad (3.6)$$

Ceci est vérifié en choisissant $\lambda[t_f^{k_{cyc}} - t_\infty] = N$ avec

$$N = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{1 + K}{\delta}\right) \quad (3.7)$$

Si $\delta > 0$, alors $N < +\infty$, ceci démontre le point (i).

(ii) Si $\kappa \leq 1$ alors $V(\tau_0^{k_{cyc}}) \leq V\kappa(\tau_0^{k_{cyc}}) \leq 1$. L'inégalité (3.4) devient

$$V(t_f^{k_{cyc}}) \leq e^{-\gamma(t_f^{k_{cyc}} - t_\infty)}(1 + K + \epsilon) = \delta(\gamma) \quad (3.8)$$

Le terme $\delta(\gamma)$ peut être rendu aussi petit que désiré en augmentant γ (ou en augmentant $\lambda[t_f^{k_{cyc}} - t_\infty]$). La preuve est complète tant que $\alpha(\|x\|) \leq V(x, t)$ pour tout x et t . ■

Proposition 3 (Stabilité Forte) : *Soit un système faiblement stable sur Ω , et si de plus on a :*

- $V(t_{k+1}^-) \leq V(t_k^-)$;
- V est uniformément bornée et continue sur $I_{k_{cyc}} - \cup_k \{t_k\}$.

Alors le système est fortement stable au sens de la définition 3. ■

Des conditions suffisantes pour avoir la stabilité forte sont $\sigma_V(t_k) \leq 0$ et $V(t_{k+1}^-) \leq V(t_k^+)$, mais ces conditions de stabilité permettent aussi d'avoir le cas où $\sigma_V(t_k) \geq 0$ à condition d'avoir aussi $V(t_{k+1}^-) < V(t_k^+) - \delta$ pour un $\delta > 0$ assez grand. Remarquons aussi que $\dot{V}(t)$ ne doit pas être nécessairement ≤ 0 tout au long des trajectoires du système sur (t_k, t_{k+1}) (voir figure 3.1.(b)). La raison pour laquelle nous avons choisi $\Sigma_{\mathcal{I}}^-$ et non pas $\Sigma_{\mathcal{I}}^+$ dans (3.1) est que cela nous permet d'intégrer la valeur de $V(t_0^-)$ dans l'analyse de stabilité. Remarquons aussi que $\dot{q}(t_\infty^+) = \dot{q}(t_\infty^-)$.

Pour résumer les conséquences de ce qui est énoncé dans le chapitre 2 et la section 3.2, soit la proposition suivante :

Proposition 4 : . Soit le système Lagrangien de complémentarité défini en (2.1), accomplissant un mouvement cyclique comme défini en (2.3), avec les contraintes **i)**, **ii)**, **iii)** sur la boucle fermée. Supposons que sur les phases $\Omega_{k_{cyc}}$, on utilise un contrôleur qui converge asymptotiquement. Alors la stabilité asymptotique au sens des définitions 2 et 3 implique que :

- La trajectoire désirée asymptotiquement stable en boucle fermée $X^{i,c}(\cdot)$ soit sans impact.
- Pendant la période de transition, le contrôleur doit garantir l'existence de collisions avec $\partial\Phi$ ainsi qu'une stabilisation en temps fini sur $\partial\Phi$.
- Contrairement au cas du mouvement non contraint ($\Phi = \mathbb{R}^n$), le signal $X_d(\cdot)$ entrant dans la fonction de Lyapunov, le signal $X_d^*(\cdot)$ dans le contrôleur, et le signal $X^{i,c}(\cdot)$, ne sont pas égaux au signal unique utilisé dans le cas non-contraint, signal habituellement appelé trajectoire désirée. ■

Cette proposition est la conséquence des points **i)**, **ii)**, **iii)**, $\alpha)$ et $\delta)$, **a)** et **d)**, ainsi que des définitions 2 et 3.

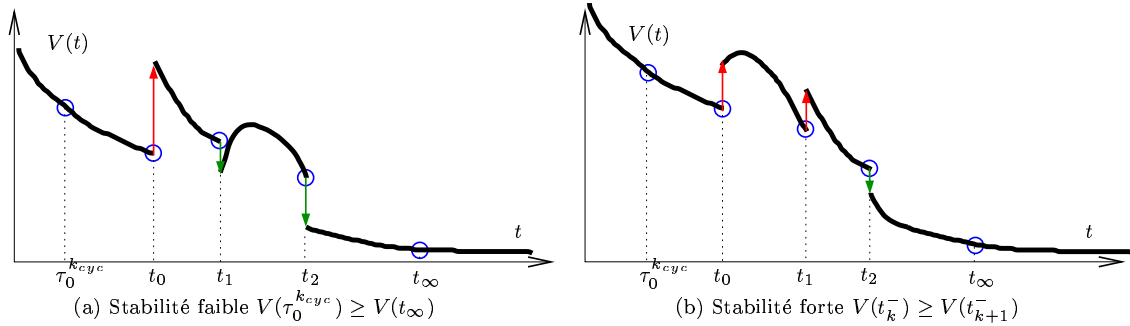


FIG. 3.1 – Exemple d'évolution de la fonction de Lyapunov

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions de stabilité nécessaires à l'étude de la stabilité de systèmes mécaniques non-réguliers tels que décrits dans les deux premiers chapitres. Dans les chapitres suivants nous allons présenter un schéma de contrôle pour faire de la poursuite de trajectoire. Ce schéma de contrôle sera analysé à l'aide des outils qui viennent d'être présentés.

Chapitre 4

Structure du contrôleur

Dans ce chapitre nous allons détailler le schéma de commande utilisé pour faire de la poursuite de trajectoire pour des systèmes mécaniques non-réguliers. Nous allons préciser la forme des trajectoires de référence pour les phases de stabilisations (phases $I_{k_{cyc}}$) et de décollage (fin des phases $\Omega_{2k_{cyc}+1}$).

4.1 Idée directrice

Pour rendre la conception du contrôleur plus facile, la dynamique du système (2.1) est réécrite dans les coordonnées généralisées introduites par [McClamroch & Wang, 1988]. Après

transformation dans les nouvelles coordonnées $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$, $q_1 = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ \vdots \\ q_1^m \end{bmatrix}$, $q = Q(X) \in \mathbb{R}^n$, la

dynamique du système est :

$$\begin{cases} M_{11}(q)\ddot{q}_1 + M_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_1(q,\dot{q})\dot{q} + g_1(q) = T_1(q)U + \lambda \\ M_{21}(q)\ddot{q}_1 + M_{22}(q)\ddot{q}_2 + C_2(q,\dot{q})\dot{q} + g_2(q) = T_2(q)U \\ q_1^i \geq 0, \quad q_1^i \lambda_i = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m \\ \text{Loi de chocs} \end{cases} \quad (4.1)$$

où l'ensemble des relations de complémentarité peuvent s'écrire de façon plus compacte $0 \leq \lambda \perp Dq \geq 0$ avec $D = [I_m; 0] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, I_m est la matrice identité. On a clairement $M_{21}(q) = M_{12}^T(q) \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $M_{11}(q) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $M_{22}(q) \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$. Dans les nouvelles coordonnées q , l'espace des configurations est $\Phi = \{q | Dq \geq 0\}$. Le cône tangent $T_\Phi(q_1 = 0) = \{v | Dv \geq 0\}$ est l'espace des vitesses admissibles lorsque le système est sur la frontière de Φ . Le cône polaire à $T_\Phi(\cdot)$ est le cône normal $N_\Phi(q) = \{v | \forall z \in T_\Phi, z^T v \leq 0\}$. Dans le cas où $q \in \partial\Phi$, nous avons $N_\Phi(q) = \{v | v = D^T \bar{\lambda}, \bar{\lambda} \leq 0\}$ [Hiriart-Urruty & Lemaréchal, 1996]. D'après (4.1) la force de contact généralisée est $P_q = D^T \lambda \in -N_\Phi(q)$.

Le contrôleur développé dans ce chapitre utilise trois lois de contrôle de bas niveau pour chacune des phases $\Omega_{2k_{cyc}}$, $\Omega_{2k_{cyc}+1}$ et $I_{k_{cyc}}$:

$$T(q)U = \begin{cases} U_{nc} & \text{pour } t \in \Omega_{2k_{cyc}} \\ U_t & \text{pour } t \in I_{k_{cyc}} \\ U_c & \text{pour } t \in \Omega_{2k_{cyc}+1} \end{cases}$$

où $T(q) = \begin{pmatrix} T_1(q) \\ T_2(q) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On remarquera par la suite que la structure de commande utilisée pour ces trois modes reste identique (boite “contrôleur non-linéaire” unique sur la figure 4.1), la loi U_t est une simplification de la loi U_{nc} lorsque les signaux \dot{q}_d^* et \ddot{q}_d^* sont nuls. Et la loi U_c correspond à la loi U_{nc} à laquelle on ajoute un contrôle en force. Un superviseur commute entre chacune de ces trois lois de commande, le séquençage des trois phases est décrit sur le graphe de la figure 4.2. La stabilité de ce contrôleur est analysée en s’appuyant sur les critères introduits dans le chapitre précédent. La stabilité asymptotique de ce schéma de commande fait que le système rentre en contact avec la contrainte tangentiellement après un nombre suffisant de cycles (un cycle correspond à $\Omega_{2k_{cyc}} \cup I_{k_{cyc}} \cup \Omega_{2k_{cyc}+1}$). Asymptotiquement la transition entre une phase libre et une phase complètement contrainte se fait sans impact.

Remarque 2 (Les effets du couplage dynamique [couplage entre q_1 et q_2]) : D’après (4.1) il résulte que $\sigma_{\dot{q}_2}(t_k) = M_{22}^{-1}M_{21}\sigma_{\dot{q}_1}(t_k)$. Appliquons pour l’instant un retour d’état linéarisant U dans (4.1) tel que la dynamique devienne :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = v_1 + \lambda \\ \ddot{q}_2 = v_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

où v_1 et v_2 sont les nouvelles entrées de commande. Nous pourrions être tentés de s’inspirer du cas à un degré de liberté, voir [Brogliato *et al.*, 1997]. Pourtant il y a peu de chance d’avoir $\sigma_V(t_k) \leq 0$ à chaque instant d’impact, sauf si on a $V(t) = T(t)$ (l’énergie cinétique). Ceci parce que le contrôleur ne découple pas la dynamique au moment des impacts. Le fait de ne pas avoir $\sigma_V(t_k) \leq 0$ interdit l’utilisation de tout contrôleur basé sur une fonction de Lyapunov qui ne se rapproche pas assez de l’énergie mécanique du système. Dans la suite de notre étude nous utiliserons une fonction de Lyapunov qui est très proche de l’énergie globale du système. Ceci nous aidera beaucoup dans l’analyse de stabilité. ■

Comme nous l’avons vu dans le chapitre 2, une stratégie voulant imposer aveuglément un contact tangentiel sur $\partial\Phi$ et sans incorporer les impacts dans l’analyse de stabilité, ne peut pas être utilisée en pratique par le manque de robustesse. Donc la loi de commande pour la phase de transition doit être définie telle que :

- le système frappe la surface de la contrainte lorsque l’erreur de poursuite est non nulle (et ainsi dissipe de l’énergie).
- le système approche la contrainte de façon tangentielle si la poursuite est parfaite (et ainsi il n’y a pas de rebond).

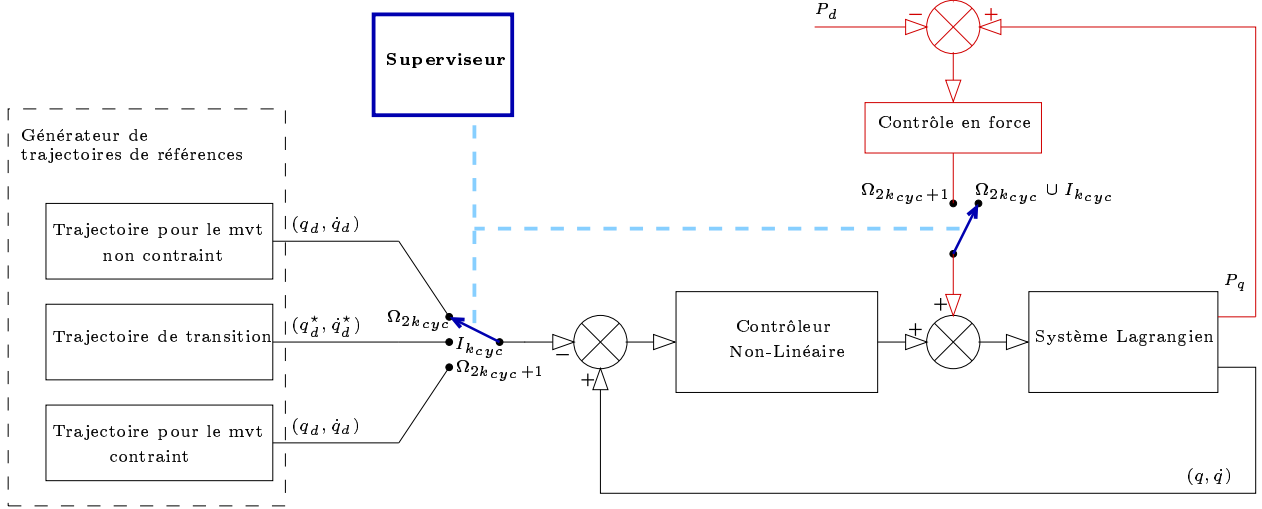


FIG. 4.1 – Structure du contrôleur

Ces deux situations sont antagonistes. De plus le couplage entre q_1 et q_2 dans (4.1), les conditions de stabilité dans les propositions 1 et 3, font que la stabilité asymptotique est assez difficile à obtenir si les vitesses comportent des discontinuités. En effet, comme indiqué au point **c**) du chapitre 2, un saut dans la vitesse à l’instant t_k implique un saut positif de la fonction de Lyapunov $\sigma_V(t_k) > 0$ lorsque $V \equiv 0$. C’est pourquoi la phase de transition est conçue en tenant compte des impacts. Nous devons trouver une manière d’avoir $V(t_f^{k_{cyc}}) = 0$ pour forcer le système à rester sur la trajectoire désirée $X_d(\cdot)$ (ici notée $q_d(\cdot)$). Ceci n’est pas trivial en général (voir la remarque 2), et définir $q_d^*(\cdot)$ tel que présenté dans la section suivante est une façon d’y parvenir.

4.1.1 Superviseur

Un superviseur permet de commuter entre chacune des commandes U_{nc} , U_t et U_c . On voit sur la figure 4.2 l’évolution des trois phases au cours des cycles (la définition des instants de commutation sera donnée plus loin). Il est à noter que le superviseur commute entre différentes trajectoires de références (fonction de la phase dans laquelle le système se trouve), mais que la structure du contrôleur reste toujours la même (voir figure 4.1). Ce contrôleur s’inspire des commandes basées sur la passivité que l’on trouve dans la littérature. Nous allons en étudier deux dans les chapitre suivants.

Les commandes U_{nc} , U_t et U_c ont donc la forme suivante :

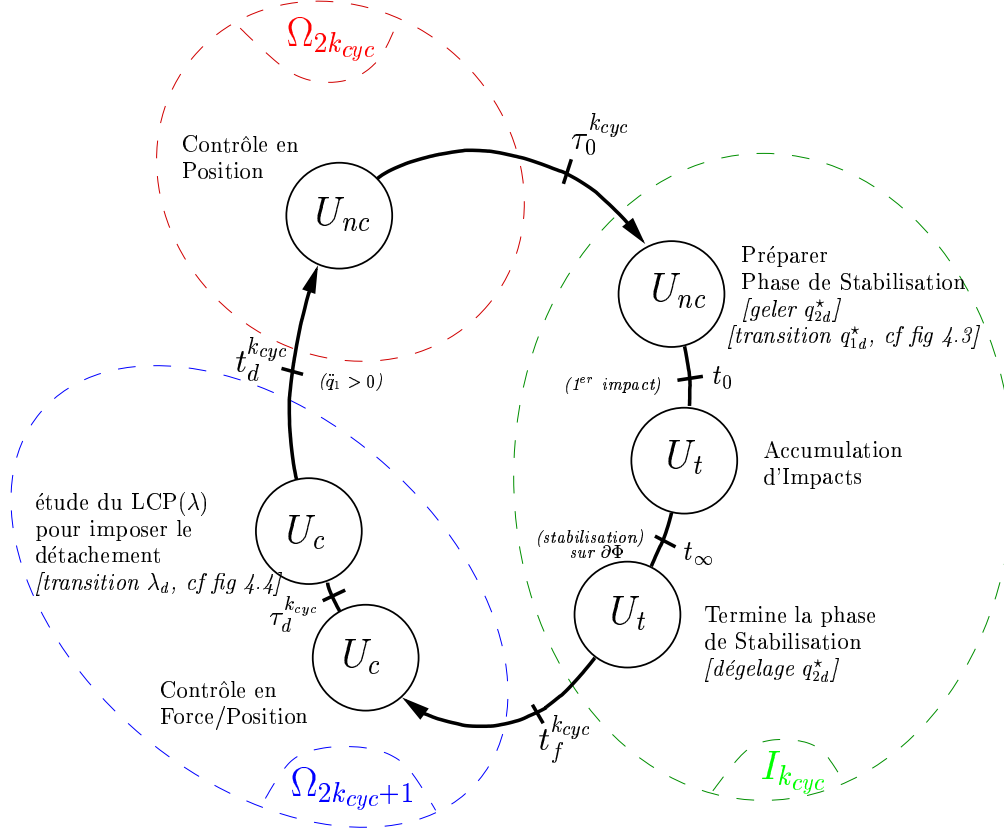


FIG. 4.2 – Evolution du superviseur

$$T(q)U = \begin{cases} U_{nc} = U_{nc}(q, q_d^*, \dot{q}, \dot{q}_d^*, \ddot{q}, \ddot{q}_d^*) \\ U_t = U_{nc}(q, q_d^*, \dot{q}, \dot{q}_d^*, \ddot{q}, \ddot{q}_d^*) & \text{avant le premier impact} \\ U_t = U_{nc}(q, q_d^*, \dot{q}, 0, \ddot{q}, 0) & \text{après le premier impact} \\ U_c = U_{nc} - P_d + K_f(P_q - P_d) \end{cases} \quad (4.3)$$

où $-P_d + K_f(P_q - P_d)$ représente le contrôle en force qui est rajouté pendant la phase complètement contrainte pour imposer une force de contact non nulle.

On définit les trois phases $\Omega_{2k_{cyc}}$, $I_{k_{cyc}}$ et $\Omega_{2k_{cyc}+1}$ par:

- $\Omega_{2k_{cyc}} = [t_d^{k_{cyc}}, \tau_0^{k_{cyc}}]$ pour la phase libre.
- $I_{k_{cyc}} = [\tau_0^{k_{cyc}}, t_f^{k_{cyc}}]$ pour la phase de transition.
- $\Omega_{2k_{cyc}+1} = [t_f^{k_{cyc}}, t_d^{k_{cyc}}]$ pour la phase complètement contrainte.

4.2 Description des trajectoires désirées durant la phase de transition

Dans cette section nous définissons les trajectoires désirées $q_d^*(t)$ et $q_d(t)$ durant la phase de transition (voir la figure 4.3 pour $q_{1d}^*(\cdot)$, où les points A, A', B', B et C correspondent à ceux de la figure 2.3) :

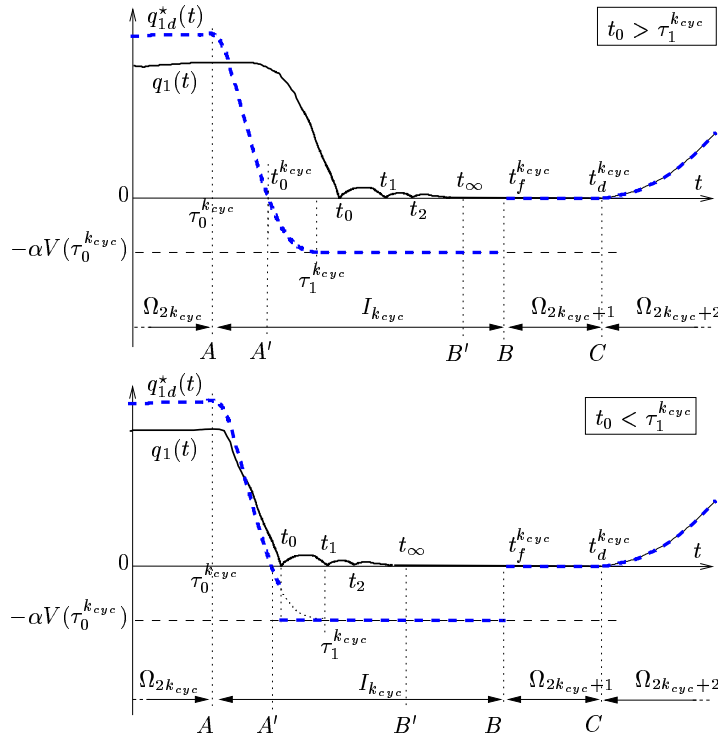


FIG. 4.3 – Trajectoires désirées

Nous définissons les instants suivants :

- $\tau_0^{k_{cyc}}$ est choisi par le concepteur comme étant le début de la phase de transition $I_{k_{cyc}}$,
- $t_0^{k_{cyc}}$ est l'instant correspondant au passage par zéro de $q_{1d}^*(\cdot)$, $q_{1d}^*(t_0^{k_{cyc}}) = 0$,
- t_0 est l'instant du premier impact,
- t_∞ est le point d'accumulation de la suite $\{t_k\}_{k \geq 0}$,
- $\tau_1^{k_{cyc}}$ est l'instant tel que $q_{1d}^*(\tau_1^{k_{cyc}}) = -\alpha V(\tau_0^{k_{cyc}})$ et $\dot{q}_{1d}^*(\tau_1^{k_{cyc}}) = 0$ (1).

1. Dans [Brogliato, 1999] et [Brogliato *et al.*, 2000] il est implicitement supposé dans la preuve de stabilité que $\tau_1^{k_{cyc}} < t_0$. Cette hypothèse est levée dans cette étude.

- $t_f^{k_{cyc}}$ correspond à la fin de la phase de transition $I_{k_{cyc}}$ et au début de la phase complètement contrainte. C'est à dire au début de l'application de la force de contact désirée λ_d .
- $\tau_d^{k_{cyc}}$ est choisi par le concepteur comme étant le début de la sous-phase de décollage,
- $t_d^{k_{cyc}}$ est l'instant de décollage, donc la fin de la phase $\Omega_{2k_{cyc}+1}$

Sur $[\tau_0^{k_{cyc}}, t_0]$, nous imposons que $q_d^*(t)$ soit deux fois différentiable, et $q_{1d}^*(t)$ décroît vers $-\alpha V(\tau_0^{k_{cyc}})$ sur $[\tau_0^{k_{cyc}}, \tau_1^{k_{cyc}}]$.

Pour tenir compte du couplage entre q_1 et q_2 , le signal $q_{2d}^*(t) \in C^2(\mathbb{R}^+)$ est gelé pendant la phase de transition, i.e.:

- $q_{2d}^*(t) = q_{2d}^*$, $\dot{q}_{2d}^*(t) = 0$ sur $[\tau_0^{k_{cyc}}, t_\infty]$
- $q_{2d}^*(t)$ est défini sur $[\tau_0^{k_{cyc}}, t_0^{k_{cyc}}]$ tel que $\dot{q}_{2d}^*(t_0^{k_{cyc}}) = 0$.

Sur $(t_0, t_f^{k_{cyc}}]$, q_d et q_d^* sont définis comme ceci :

$$q_d = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{2d}^* \end{pmatrix}, q_d^* = \begin{pmatrix} -\alpha V(\tau_0^{k_{cyc}}) \\ q_{2d}^* \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Sur $[t_f^{k_{cyc}}, t_d^{k_{cyc}}]$ on fixe $q_d = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{2d}(t) \end{pmatrix}$ et $q_{1d}^* = 0$. Si bien que sur $(t_f^{k_{cyc}}, t_d^{k_{cyc}})$ on obtient $q_d(t) = q_d^*(t)$, or dans le cas 1 degré de liberté nous avons $X_d(t) \neq X_d^*(t)$ pour imposer une force de contact non nulle. Ici la force de contact est imposée par la boucle de contrôle en force (voir remarque page 26).

Le but de q_d^* est de créer une force de potentiel "virtuelle" qui stabilise le système sur $\partial\Phi$ même si la position de la contrainte n'est pas connue avec précision. On fait l'analogie avec une bille qu'on lâche d'une certaine altitude et qui finit par se stabiliser sur un sol plan sous le seul effet de la gravité. Et ceci même si la position du sol n'est pas connue.

Par conséquent le point fixe (q_d, \dot{q}_d) du système de complémentarité est utilisé dans l'expression de la fonction de Lyapunov ($\tilde{q} = q - q_d$). Alors que le point fixe non atteignable (q_d^*, \dot{q}_d^*) est utilisé dans l'expression de la loi de contrôle ($\bar{q} = q - q_d^*$). Dans l'expression de U_{nc} dans (4.3) on a $q_d^*(\cdot) = q_d(\cdot)$ puisque $q_d^*(t) = q_d(t)$ pour $t \in \Omega_{2k_{cyc}} \cup [\tau_0^{k_{cyc}}, t_0]$.

En résumé, après le premier impact à t_0 , $q_{1d}(\cdot)$ est fixé à zéro et $q_{1d}^*(\cdot)$ est fixé à $-\alpha V(\tau_0^{k_{cyc}})$. Comme en général $\dot{q}_{1d}(t_0^-) \neq 0$ et $q_{1d}(t_0^-) \neq 0$, cela induit pour $q_{1d}(\cdot)$ une sorte de choc plastique ($e_n = 0$) à t_0 .

En accord avec la figure 2.3, l'instant $\tau_0^{k_{cyc}}$ correspond au point A ,
 " t_∞ " B' ,
 " $t_0^{k_{cyc}}$ " A' ,
 " $t_d^{k_{cyc}}$ " C ,
 " $t_f^{k_{cyc}}$ " B ,
 " $\tau_1^{k_{cyc}}$ " A'' si $V(\tau_0^{k_{cyc}}) = 0$,

La trajectoire désirée du système en boucle fermée $X^{i,c}(\cdot)$ est définie comme étant $q^{i,c}(t) = q_d^*(t)$ sur $\Omega_{2k_{cyc}}$, $q^{i,c}(t) = q_d^*(t)$ avec $\alpha = 0$ sur $I_{k_{cyc}}$, et $q_1^{i,c}(t) = 0$ sur $\Omega_{2k_{cyc}+1}$, $q_2^{i,c}(t) = q_{2d}^*(t)$ sur \mathbb{R}^+ (cette trajectoire est sans impact).

Le choix de $q_d^(\cdot)$ est essentiellement fait pour avoir $\sigma_V(t_k) \leq 0$ sur $I_{k_{cyc}}$.*

Remarque 3 : Il est à remarquer que la stratégie proposée ici, implique que la commande U_c commute seulement lorsque la stabilisation sur $\partial\Phi$ est finie. Ceci implique que la durée d'un cycle $\Omega_{2k_{cyc}} \cup I_{k_{cyc}} \cup \Omega_{2k_{cyc}+1}$ n'est pas connue a priori, elle est minorée par $|t_\infty - t_0|$. La durée d'un cycle peut donc être diminuée si les impacts sont plastiques ($e_n = 0$), alors que le cycle sera plus long si e_n est proche de 1. Ceci est logique d'un point de vue intuitif, puisque c'est une conséquence de la façon dont est dissipée l'énergie cinétique à chaque impact.

Remarque 4 : Puisque nous voulons que $V_{\Sigma_T}(\cdot)$ serve de fonction de Lyapunov pour P_{Σ_T} dans (3.1), et puisque le point fixe de l'application de Poincaré vérifie $q_{\Sigma_T,1}^* = 0$, nous devons fixer q_{1d} à zéro et q_{2d} constant durant la phase de transition. Si bien que la trajectoire d'approche (AA') (sur la figure 2.3) n'est pas si facile que cela à choisir. C'est ce que la proposition 6 (section 5.1.3) résout.

4.3 Conditions pour avoir le détachement en fin de phase complètement contrainte $\Omega_{2k_{cyc}+1}$

Dans la section précédente, nous avons défini la trajectoire $q_d^*(\cdot)$ pour stabiliser le système sur $\partial\Phi$. Nous allons maintenant voir quelles sont les propriétés que le signal de commande $U_c(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, P_d)$ doit avoir pour qu'il y ait détachement à la fin de la phase complètement contrainte $\Omega_{2k_{cyc}+1}$. Sur $[t_f^{k_{cyc}}, t_d^{k_{cyc}})$, la dynamique du système bouclé est définie par :

$$M(q)\ddot{q} + F(q, \dot{q}) = U_c + D^T \lambda \quad (4.5a)$$

$$0 \leq q_1 \perp \lambda \geq 0 \quad (4.5b)$$

avec $F(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$. Sur $[t_f^{k_{cyc}}, t_d^{k_{cyc}})$, le système est contraint sur la surface $\partial\Phi$, i.e. $q_1(t) = 0$ et $\dot{q}_1(t) = 0 \forall t \in [t_f^{k_{cyc}}, t_d^{k_{cyc}})$. Alors la relation de complémentarité (4.5b) implique [Glocker, 2001] :

$$0 \leq \ddot{q}_1 \perp \lambda \geq 0 \quad (4.7)$$

Il y a décollage en $t_d^{k_{cyc}}$ si $\ddot{q}_1(t_d^{k_{cyc}+}) > 0$. D'après le LCP (4.7), une condition nécessaire pour avoir $\ddot{q}_1(t_d^{k_{cyc}+}) > 0$ est d'avoir $\lambda(t_d^{k_{cyc}-}) = 0$.

Proposition 5 : Soit le système bouclé (4.5) (4.3), étudié dans la phase de contact permanent $[t_f^{k_{cyc}}, t_d^{k_{cyc}}]$. Le détachement est assuré si

$$b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) > 0$$

avec $b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) = DM^{-1}(q)[-F(q, \dot{q}) + U_{nc} - D^T(1 + K_f)\lambda_d]$. ■

Preuve de la proposition 5

Détaillons l'expression du Problème Linéaire de Complémentarité (LCP) (4.7). Avec les notations du paragraphe 4.1, le LCP (4.7) peut être réécrit comme ceci :

$$0 \leq D\ddot{q} \perp \lambda \geq 0 \quad (4.8)$$

Des relations (4.5a) et (4.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1}(q)[-F(q, \dot{q}) + U_c + D^T\lambda] \\ &= M^{-1}(q)[-F(q, \dot{q}) + U_{nc} + (1 + K_f)(D^T\lambda - P_d)] \end{aligned} \quad (4.9)$$

En combinant l'équation (4.9) avec (4.8), on obtient le nouveau LCP :

$$0 \leq \underbrace{DM^{-1}(q)[-F(q, \dot{q}) + U_{nc} - (1 + K_f)D^T\lambda_d]}_{b(q, \dot{q}, U, \lambda_d)} + \underbrace{(1 + K_f)DM^{-1}(q)D^T}_{A(q)} \lambda \perp \lambda \geq 0 \quad (4.10)$$

qui se réécrit de façon plus compacte en

$$0 \leq b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) + A(q)\lambda \perp \lambda \geq 0 \quad (4.11)$$

Etudions le LCP défini en (4.11). Comme $A(q) > 0$, alors il existe une solution unique :

- Si $b(\cdot) > 0$, alors $b(\cdot) + A(q)\lambda > 0$ et la condition d'orthogonalité $b(\cdot) + A(q)\lambda \perp \lambda$ impliquent que $\lambda = 0$.
- Si $b(\cdot) < 0$, alors la condition $0 \leq b(\cdot) + A(q)\lambda_1$ et l'orthogonalité impliquent que $\lambda = -A^{-1}(q)b(\cdot) > 0$.
- Si $b(\cdot) = 0$, alors le LCP (4.11) se simplifie en $0 \leq A(q)\lambda \perp \lambda \geq 0$ et donc $\lambda = 0$.

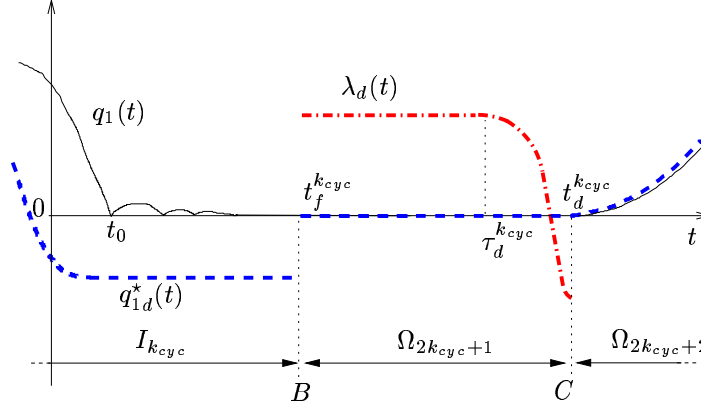
Pour conclure, $\lambda = 0$ si et seulement si $b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) \geq 0$. Des équations (4.9) et (4.10) on obtient

$$\ddot{q}_1(t) = b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) + A(q)\lambda$$

Si $\lambda = 0$, alors $\ddot{q}_1(t) = b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d)$, et une condition suffisante pour avoir détachement est :

$$b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) > 0$$

■


 FIG. 4.4 – Trajectoire désirée de λ_d

Pour obtenir le décollage, la première idée serait de fixer $\lambda_d = 0$ et de choisir une trajectoire de référence telle que $\ddot{q}_{1d}^*(t) > 0$. Or cette approche ne suffit pas toujours: Pour avoir décollage il faut avoir $b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) > 0$, et le signe de $b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d)$ est aussi fonction de l'état (q, \dot{q}) et de la commande U_{nc} . (On exprimera cette relation de façon plus précise dans le chapitre suivant, section 5.1.2, sur un cas pratique).

Par contre le seul paramètre sur lequel nous pouvons influencer lors de la phase de décollage est la valeur $\lambda_d(t)$. La stratégie de contrôle adoptée est donc de faire décroître $\lambda_d(t)$ jusqu'à obtenir

$$D^T(1 + K_f)\lambda_d > -F(q, \dot{q}) + U_{nc}$$

c'est-à-dire

$$b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) > 0$$

On voit sur la figure 4.4 le profil du signal qui décroît jusqu'à ce que soit détecté $b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) > 0$. Ceci veut aussi dire que l'instant de décollage $t_d^{k_{cyc}}$ n'est pas connu par avance, mais il est fonction de l'évolution du système, donc de l'état du système ("state-based event").

Remarque 5 : Ceci fait qu'en fonction de la valeur de $U_{nc} - F(q, \dot{q})$, $\lambda_d(t)$ peut décroître jusqu'à une valeur négative (voir figure 4.4). Même si une valeur négative de la force de contact désirée est absurde puisque non atteignable. On fait ici le parallèle entre d'une part la phase de stabilisation, qui impose une position désirée q_{1d}^* violant la contrainte pour être sûr d'atteindre la surface de contact. Et d'autre part cette phase de décollage qui fixe une valeur non atteignable pour l'effort de contact pour être sûr de décoller.

Remarque 6 : Cette phase de décollage n'apparaît pas dans le graphe 4.2 comme un mode distinct car il n'y a pas de discontinuité de l'état du système au cours de cette phase. Le système 4.5 reste fondamentalement une DAE jusqu'au décollage.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu la structure générale du contrôleur proposé dans cette thèse. Les trajectoires de référence utilisées lors des phases de stabilisation ont été définies. La proposition 5 présente les conditions nécessaires et suffisantes pour imposer le décollage en fin de phase complètement contrainte.

Dans ce chapitre la loi de commande $T(q)U$ a seulement été donnée de façon générique. Nous allons voir dans le chapitre suivant que plusieurs types de contrôleur non-linéaires peuvent être utilisés.

Chapitre 5

Etude de deux contrôleurs non-linéaires

Dans ce chapitre nous allons proposer l'extension de deux lois de commande "basées sur la passivité" au cas de la poursuite de trajectoires pour des systèmes mécaniques non-réguliers. La première section étend la loi proposée par [Paden & Panja, 1988]. La seconde section étend la loi de [Slotine & Li, 1988]. Le point **i)** de la proposition 6 a été proposé dans [Brogliato *et al.*, 2000]. Dans cette thèse nous proposons les points **ii)**, **iii)** et **iv)** de cette proposition relative à la loi de [Paden & Panja, 1988], ainsi que les propositions 7, 8, 9 et 10 relatives à la loi de [Slotine & Li, 1988].

5.1 Loi de Paden-Panja

La loi de commande utilisée dans cette section est basée sur le contrôleur présenté dans [Paden & Panja, 1988] qui représente l'extension la plus directe de la commande PD au cas de la poursuite de trajectoires. La convergence en boucle fermée est globalement asymptotique mais pas exponentielle. La preuve utilise le théorème de Matrosov, qui est une extension du principe d'invariance de La Salle au cas non-autonome. Ce contrôleur est initialement prévu pour du suivi de trajectoires globalement asymptotique. Nous allons adapter cette commande "passivity-based" (voir annexe D) au cas non-régulier. Soient les lois suivantes :

$$T(q)U = \begin{cases} U_{nc} = M(q)\ddot{q}_d^* + C(q,\dot{q})\dot{q}_d^* + G(q) - \gamma_1(q - q_d^*) - \gamma_2(\dot{q} - \dot{q}_d^*) \\ U_t = U_{nc} & \text{avant le premier impact} \\ U_t = G(q) - \gamma_1(q - q_d^*) - \gamma_2\dot{q} & \text{après le premier impact} \\ U_c = U_{nc} - P_d + K_f(P_q - P_d) \end{cases} \quad (5.1)$$

où $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $K_f > 0$, $P_d = D^T \lambda_d$ représente la force désirée que l'on souhaite avoir lors de la phase complètement contrainte.

Hypothèse 1 : Le contrôleur U_t dans (5.1) assure que la suite $\{t_k\}_{k \geq 0}$ des instants d'impacts existe, et avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = t_\infty < +\infty$.

L'hypothèse 1 est nécessaire pour être sûr d'avoir un instant de fin d'accumulation fini, et que le système à événements discrets (2.3) ne reste pas bloqué dans un mode. Vu que

l'on va choisir une stratégie de commande qui tend à créer une force de “gravité virtuelle” en direction de la contrainte considérée (à l'image de l'exemple de la bille sur figure 1.4.(b)), cette hypothèse n'est pas trop restrictive.

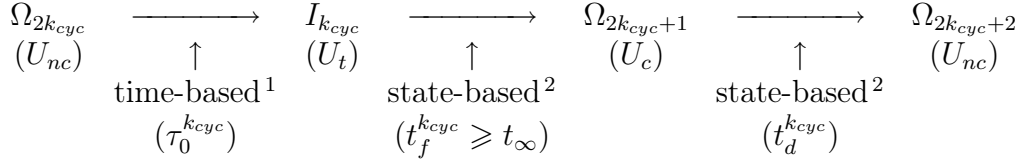
Fonction de Lyapunov

Soit la fonction :

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}^T \tilde{q} \quad (5.2)$$

avec $\tilde{q}(\cdot) = q(\cdot) - q_d(\cdot)$.

La dynamique du système en boucle fermée est maintenant complètement définie. Elle est la somme de systèmes dynamiques complexes, de contraintes unilatérales, de loi d'impact et de commandes non continues (i.e : commandes commutées). De plus sur le schéma suivant on rappelle l'évolution standard d'un cycle.



On remarque que les temps de commutation entre les phases $I_{k_{cyc}}$ et $\Omega_{2k_{cyc}+1}$ d'une part et les phases $\Omega_{2k_{cyc}+1}$ et $\Omega_{2k_{cyc}+2}$ d'autre part ne sont pas connus a priori. Ceci complique encore l'analyse de stabilité, comme nous allons le voir par la suite. Seul le temps $(\tau_d^{k_{cyc}})$ de début de la stabilisation sur $\partial\Phi$ est choisi par le concepteur de la loi de commande.

Le but de notre étude est de montrer que ce système dynamique, ou plutôt la dynamique associée à l'erreur de poursuite, est stable au sens des définitions 2 et 3, en prenant le vecteur d'état suivant : $x^T = (\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T)$.

Comme on peut le voir sur la figure 4.3, si le premier impact (noté t_0) d'un cycle se produit avant que le signal de référence q_{1d}^* ne soit complètement gelé, alors l'analyse de stabilité d'un tel système devient plus compliquée que dans [Brogliato *et al.*, 2000]. Soit la définition suivante :

Définition 4 : $\{CI\}$ est le sous-espace des conditions initiales $x(0)$ qui assure que $t_0 \geq \tau_1^{k_{cyc}}$ uniformément le long d'un mouvement tel que défini dans (2.3).

Ce qui a été vu jusqu'à présent est indépendant de m (le nombre de contraintes). Prenons le cas $m = 1$. Nous reviendrons sur le cas des impacts multiples ($m \geq 2$) dans le chapitre 7.

1. “time-based” : l'occurrence de cet évènement est connue, cet instant est fixé par le concepteur de commande.
 2. “state-based” : l'occurrence de cet évènement est inconnue, il est fonction de l'évolution de système.

L'ensemble $\{CI\}$ contient les valeurs initiales qui garantissent qu'il n'y a pas d'impact avant que le signal $q_d^*(\cdot)$ soit correctement gelé. Avoir $x(0) \in \{CI\}$ est très intéressant parce que cela permet d'avoir toutes les conditions réunies pour prouver la stabilité asymptotique forte de tels systèmes [Brogliato *et al.*, 2000]. Mais en général $x(0) \notin \{CI\}$, et de plus $\{CIs\}$ n'est pas forcément connu pour des systèmes qui ne sont pas à un degré de liberté. Une des difficultés de l'analyse de stabilité est de prouver que l'erreur de poursuite n'augmente pas d'un cycle $\Omega_{2k_{cyc}} \cup I_{k_{cyc}} \cup \Omega_{2k_{cyc}+1}$ à l'autre. Comme nous le verrons par la suite le point crucial de l'étude est le premier saut de $V(\cdot)$, i.e. $\sigma_V(t_0)$.

Nous allons d'abord faire quelques calculs préparatoires à l'analyse de stabilité de cette loi de commande bouclée avec le système (4.1). Nous allons calculer dans la section suivante les variations de $V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ pour les différentes phases $\Omega_{2k_{cyc}}$, $I_{k_{cyc}}$ et $\Omega_{2k_{cyc}+1}$.

5.1.1 Calcul des variations de la fonction de Lyapunov

Avant de passer à l'analyse de stabilité dans la section 5.1.3, on montre ici quelques propriétés de la fonction de Lyapunov (5.2) associée au système (4.1) bouclé avec la commande (5.1).

On montrera dans les sous-sections 5.1.1 à 5.1.1 que:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Sur } \Omega_{2k_{cyc}} \quad \dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq 0 \quad (5.8) \\ \text{Sur } \Omega_{2k_{cyc}+1} \quad \dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq 0 \quad (5.12) \\ \text{Sur } I_{k_{cyc}} \text{ pendant l'accumulation d'impacts } [t_0, t_\infty] \\ V(t_{k+1}) - V(t_k) \leq 0 \quad (5.24) \\ \sigma_V(t_0) = T_L - \frac{1}{2} \dot{q}_d(t_0^-)^T M(q) \dot{q}_d(t_0^-) + \dot{q}(t_0^-)^T M(q) \dot{q}_d(t_0^-) - \frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}_1(t_0^-) \tilde{q}_1(t_0^-) \quad (5.30) \\ \sigma_V(t_k) = T_L \text{ pour } k \geq 1 \quad (5.30) \\ \text{Sur } I_{k_{cyc}} \text{ hors de l'accumulation d'impacts } [t_0, t_\infty] \\ \dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq 0 \quad (5.13) \text{ et } (5.31) \end{array} \right.$$

Cas non contraint, sur $\Omega_{2k_{cyc}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dynamique (4.1)} \quad : M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = TU \\ \text{Contrôleur (5.1)} \quad : TU = U_{nc} = M\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + G(q) - \gamma_1 \tilde{q} - \gamma_2 \dot{\tilde{q}} \end{array} \right.$$

En boucle fermée, les équations (4.1) et (5.1) deviennent :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = M\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + G(q) - \gamma_1 \tilde{q} - \gamma_2 \dot{\tilde{q}} \quad (5.3)$$

L'équation (5.3) se simplifie en :

$$M(q)\ddot{\tilde{q}} = -C(q, \dot{q})\dot{\tilde{q}} - \gamma_1 \tilde{q} - \gamma_2 \dot{\tilde{q}} \quad (5.4)$$

En dérivant la fonction de Lyapunov (5.2) le long des trajectoires de (5.4) on obtient :

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q) \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T M(q) \ddot{\tilde{q}} + \gamma_1 \dot{\tilde{q}}^T \tilde{q} \quad (5.5)$$

En insérant (5.4) dans (5.5), on obtient

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q) \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T [-C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} - \gamma_1 \tilde{q} - \gamma_2 \dot{\tilde{q}}] + \gamma_1 \dot{\tilde{q}}^T \tilde{q} \quad (5.6)$$

L'équation (5.6) se simplifie en :

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q) \dot{\tilde{q}} - \dot{\tilde{q}}^T C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} - \dot{\tilde{q}}^T \gamma_2 \dot{\tilde{q}} \quad (5.7)$$

Mais $\dot{\tilde{q}}^T [\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q})] \dot{\tilde{q}} = 0$ car $[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q})]$ est une matrice antisymétrique, d'où :

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\dot{\tilde{q}}^T \gamma_2 \dot{\tilde{q}} \leq 0 \text{ pour } \gamma_2 > 0 \text{ sur } \Omega_{2k} \quad (5.8)$$

Cas complètement contraint, sur $\Omega_{2k_{cyc}+1}$

Pendant les phases $\Omega_{2k_{cyc}+1}$ on a $q_1 = 0$ et $q_{1d} = 0$ d'où $\tilde{q}_1 = 0$ et $\dot{\tilde{q}}_1 = 0$. La dynamique (4.1) se transforme donc en :

$$\begin{cases} \text{Dynamique (4.1)} & : M_{12}(q) \ddot{q}_2 + C_{12}(q, \dot{q}) \dot{q}_2 + G_1(q) = T_1 U + \lambda_{q_1} \\ & M_{22}(q) \ddot{q}_2 + C_{22}(q, \dot{q}) \dot{q}_2 + G_2(q) = T_2 U \\ \text{Contrôleur (5.1)} & : TU = U_c = U_n c - P_d + K_f (P_q - P_d) \end{cases}$$

En boucle fermée, les équations (4.1) et (5.1) deviennent :

$$\begin{cases} M_{12}(q) \ddot{q}_2 + C_{12}(q, \dot{q}) \dot{q}_2 = (1 + K_f)(\lambda_{q_1} - \lambda_d) \\ M_{22}(q) \ddot{q}_2 = -C_{22}(q, \dot{q}) \dot{q}_2 - \gamma_1 \tilde{q}_2 - \gamma_2 \dot{\tilde{q}}_2 \end{cases} \quad (5.9)$$

avec $\lambda_d = (1, 0, \dots, 0)^T P_d$ car $P_d = \nabla f(q) \lambda_d$ et grâce au changement de repère (4.1) on a $\nabla F(q) = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Comme $\dot{\tilde{q}}_1 = 0$ et $\tilde{q}_1 = 0$ alors la fonction de Lyapunov (5.2) se simplifie en :

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}_2^T M_{22}(q) \dot{\tilde{q}}_2 + \frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}_2^T \tilde{q}_2 \quad (5.10)$$

En insérant (5.9) dans la dérivée de (5.10) on obtient :

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}_2^T \dot{M}_{22}(q) \dot{\tilde{q}}_2 - \dot{\tilde{q}}_2^T C_{22}(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}}_2 - \dot{\tilde{q}}_2^T \gamma_2 \dot{\tilde{q}}_2 \quad (5.11)$$

De même $[2\dot{M}_{22}(q) - C_{22}(q, \dot{q})]$ est anti-symétrique, on a donc :

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\gamma_2 \dot{\tilde{q}}_2^T \dot{\tilde{q}}_2 \leq 0 \text{ pour } \gamma_2 > 0 \text{ sur } \Omega_{2k_{cyc}+1} \quad (5.12)$$

Cas de la transition, sur $\mathbf{I}_{k_{cyc}}$

Sur $[t_0^{k_{cyc}}, t_0)$

Avant le premier impact, on a $U_t = U_{nc}$, le système se trouve dans la même configuration que pour le cas non contraint, d'où :

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\gamma_2 \dot{\tilde{q}}^T \dot{\tilde{q}} \leq 0 \quad (5.13)$$

Sur $[t_0, t_\infty]$

(i) - Calcul des variations de $V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ entre deux impacts.

$$\begin{cases} \text{Dynamique (4.1)} & : M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = TU + \lambda_{q_1} \\ \text{Contrôleur (5.1)} & : TU = U_t = G(q) - \gamma_1 \bar{q} - \gamma_2 \dot{q} \end{cases}$$

En boucle fermée, les équations (4.1) et (5.1) deviennent :

$$M(q)\ddot{q} = -C(q, \dot{q})\dot{q} - \gamma_1 \bar{q} - \gamma_2 \dot{q} + \lambda_{q_1} \quad (5.14)$$

Soit toujours la même fonction de Lyapunov : $V = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}^T \tilde{q}$.

Le signal q_d est constant sur $[t_0, t_\infty]$ d'où $\dot{q}_d = 0$ et $\ddot{q} = \dot{q}$. La fonction de Lyapunov (5.2) se simplifie en :

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}_2^T \tilde{q}_2 + \frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}_1^T \tilde{q}_1 \quad (5.15)$$

Or $\tilde{q}_1 = q_1$, et $\dim q_1 = 1$, l'équation (5.15) devient donc :

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}_2^T \tilde{q}_2 + \frac{1}{2} \gamma_1 q_1^2 \quad (5.16)$$

On dérive (5.16) par rapport à t .

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q) \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T M(q) \ddot{\tilde{q}} + \gamma_1 \dot{\tilde{q}}_2^T \tilde{q}_2 + \gamma_1 \dot{q}_1 q_1 \quad (5.17)$$

En insérant l'équation (5.14) dans (5.17) on obtient

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T \lambda_{q_1} - \gamma_2 \dot{\tilde{q}}^T \dot{\tilde{q}} - \gamma_1 \dot{\tilde{q}}^T \bar{q} + \gamma_1 \dot{\tilde{q}}_2^T \tilde{q}_2 + \gamma_1 q_1 \dot{q}_1 \quad (5.18)$$

Comme $\bar{q} = q - q_d^* = \begin{pmatrix} q_1 - q_{1d}^* \\ q_2 - q_{2d}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - q_{1d}^* \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix}$ alors

$$-\gamma_1 \dot{\tilde{q}}^T \bar{q} = -\gamma_1 \dot{\tilde{q}}_1^T q_1 + \gamma_1 \dot{\tilde{q}}_1^T q_{1d}^* - \gamma_1 \dot{\tilde{q}}_2^T \tilde{q}_2 \quad (5.19)$$

et comme $\dot{\tilde{q}}_1 = \dot{q}_1$ alors :

$$-\gamma_1 \dot{q}^T \bar{q} + \gamma_1 \tilde{q}_2^T \dot{\tilde{q}}_2 + \gamma_1 q_1 \dot{q}_1 = \gamma_1 \dot{q}_1^T q_{1d}^* \quad (5.20)$$

En insérant (5.20) dans (5.18), on obtient :

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\gamma_2 \dot{q}^T \dot{q} + \gamma_1 \dot{q}_1^T q_{1d}^* + \dot{q}^T \lambda_{q_1} \quad (5.21)$$

Comme on considère la variation de $V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ entre les rebonds alors on a $\dot{q}^T \lambda_{q_1} = 0$, puisque $\lambda_{q_1} = 0$ lorsqu'il n'y a pas contact. L'équation (5.21) devient :

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\gamma_2 \dot{q}^T \dot{q} + \gamma_1 \dot{q}_1^T q_{1d}^* \quad (5.22)$$

En intégrant (5.22) entre t_k et t_{k+1} , on obtient :

$$V(t_{k+1}) - V(t_k) = -\gamma_2 \int_{(t_k, t_{k+1})} \dot{q}^T \dot{q} dt + \gamma_1 q_{1d}^* [q_1]_{t_k}^{t_{k+1}} \quad (5.23)$$

Aux instants t_k des impacts, on a $q_1(t_k) = 0$, d'où $[q_1]_{t_k}^{t_{k+1}} = 0$. L'équation (5.23) devient :

$$V(t_{k+1}) - V(t_k) = -\gamma_2 \int_{(t_k, t_{k+1})} \dot{q}^T \dot{q} dt \leq 0 \quad (5.24)$$

(ii) - Calcul du saut de $V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ à chaque impact.

$$\begin{aligned} \sigma_V(t_k) &= V(t_k^+) - V(t_k^-) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}(t_k^+)^T M(q) \dot{\tilde{q}}(t_k^+) - \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}(t_k^-)^T M(q) \dot{\tilde{q}}(t_k^-)}_A + \underbrace{\frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}(t_k^+)^T \tilde{q}(t_k^+) - \frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}(t_k^-)^T \tilde{q}(t_k^-)}_B \end{aligned} \quad (5.25)$$

D'après la définition de la trajectoire de référence, nous avons :

- le signal $q_{2d}(t)$ gelé avant le premier impact, d'où $\tilde{q}_2(t_k^+) = \tilde{q}_2(t_k^-)$ et $\dot{\tilde{q}}_2(t_k^+) = \dot{\tilde{q}}_2(t_k^-) = 0$,
- dès le premier impact on fixe q_{1d} à zéro, d'où $q_{1d}(t_k^+) = \dot{q}_{1d}(t_k^+) = 0$.

L'expression du terme A devient :

$$A = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{q}(t_k^+)^T M(q) \dot{q}(t_k^+) - \frac{1}{2} \dot{q}(t_k^-)^T M(q) \dot{q}(t_k^-)}_{T_L} - \frac{1}{2} \dot{q}_d(t_k^-)^T M(q) \dot{q}_d(t_k^-) + \dot{q}(t_k^-)^T M(q) \dot{q}_d(t_k^-) \quad (5.26)$$

d'où

$$\begin{aligned} A &= T_L - \frac{1}{2} \dot{q}_d(t_0^-)^T M(q) \dot{q}_d(t_0^-) + \dot{q}(t_0^-)^T M(q) \dot{q}_d(t_0^-) \quad \text{pour } k = 0 \\ &= T_L \quad \text{pour } k \geq 1 \end{aligned} \quad (5.27)$$

L'expression du terme B en (5.25) devient :

$$B = \frac{1}{2}\gamma_1 \underbrace{[\tilde{q}_1(t_k^+) \tilde{q}_1(t_k^+) - \tilde{q}_1(t_k^-) \tilde{q}_1(t_k^-)]}_{=0} \quad (5.28)$$

d'où

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2}\gamma_1 \tilde{q}_1(t_k^-) \tilde{q}_1(t_k^-) \quad \text{pour } k = 0 \\ &= 0 \quad \text{pour } k \geq 1 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Finalement l'expression du saut (5.25) de $V(t, q)$ est :

$$\begin{aligned} \sigma_V(t_k) &= T_L - \frac{1}{2}\dot{q}_d(t_0^-)^T M(q) \dot{q}_d(t_0^-) + \dot{q}(t_0^-)^T M(q) \dot{q}_d(t_0^-) - \frac{1}{2}\gamma_1 \tilde{q}_1(t_k^-) \tilde{q}_1(t_k^-) \quad \text{pour } k = 0 \\ &= T_L \quad \text{pour } k \geq 1 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sur $[t_\infty, t_f^{k_{cyc}}]$

Après l'accumulation en t_∞ , le système se trouve dans la même configuration que pour la phase complètement contrainte d'où

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\dot{\tilde{q}}_2^T \gamma_2 \dot{\tilde{q}}_2 \leq 0 \quad \text{pour } \gamma_2 > 0 \quad (5.31)$$

5.1.2 Stratégie de contrôle pour assurer le détachement

Dans cette section nous allons compléter ce qui a été vu dans le paragraphe 4.3, et voir quelle stratégie adopter pour être sûr de ne pas avoir de rebond parasite lorsque la commande commute entre U_c et U_{nc} .

En insérant l'équation de la loi de commande (5.2) dans l'expression de $b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d)$ (voir proposition 5), on obtient :

$$b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) = DM^{-1}(q)[M(q)\ddot{q}_d - C(q, \dot{q})\dot{\tilde{q}} - \gamma_1 \tilde{q} - \gamma_2 \dot{\tilde{q}} - D^T(1 + K_f)\lambda_d] \quad (5.32)$$

Après quelques calculs, l'équation (5.32) et le résultat de la proposition 5 donnent une condition suffisante pour avoir le décollage :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \left([M_{(q)}^{-1}]_{11} C_{11}(q, \dot{q}) + [M_{(q)}^{-1}]_{12} C_{21}(q, \dot{q}) \right) \dot{q}_{1d} + \gamma_2 [M_{(q)}^{-1}]_{11} \dot{q}_{1d} + \gamma_1 [M_{(q)}^{-1}]_{11} q_{1d} \\ &- \left([M_{(q)}^{-1}]_{21} C_{11}(q, \dot{q}) + [M_{(q)}^{-1}]_{22} C_{21}(q, \dot{q}) \right) \dot{\tilde{q}}_2 - \gamma_2 [M_{(q)}^{-1}]_{21} \dot{\tilde{q}}_2 - \gamma_1 [M_{(q)}^{-1}]_{21} \tilde{q}_2 \\ &- [M_{(q)}^{-1}]_{11} (1 + K_f) \lambda_d + \ddot{q}_{1d} > 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

avec les décompositions des matrices $M^{-1}(q)$ et $C(q, \dot{q})$ telles que :

$$M^{-1}(q) = \begin{pmatrix} [M_{(q)}^{-1}]_{11} & [M_{(q)}^{-1}]_{12} \\ [M_{(q)}^{-1}]_{21} & [M_{(q)}^{-1}]_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{pmatrix}$$

En fonction du signe de \tilde{q}_2 et de $\dot{\tilde{q}}_2$, $b(\cdot) = \ddot{q}_1$ n'est pas forcément positif si on a seulement $\lambda_d = 0$. Donc pour assurer le décollage, il faut choisir un profil pour le signal $\lambda_d(t)$ tel qu'il soit continûment décroissant jusqu'à ce que $b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) > 0$, et ce même si une force désirée négative n'a pas de sens puisque impossible à obtenir (voir Figure 4.4). L'instant $t_d^{k_{cyc}}$ est défini comme le premier instant où $\ddot{q}_1(t_d^{k_{cyc}}) > 0$. Comme tous les signaux sont bornés, d'après (5.33) $t_d^{k_{cyc}}$ est forcément borné.

Maintenant nous devons nous assurer que le système ne rentre pas à nouveau en contact avec $\partial\Phi$ lorsque la loi de commande commute de $U_c(t_d^{k_{cyc}^-})$ vers $U_{nc}(t_d^{k_{cyc}^+})$ au décollage. Si bien que $U_{nc}(t_d^{k_{cyc}^+})$ (et surtout $q_1^*(t)$) doit être choisi correctement pour garantir $\ddot{q}_1(t_d^{k_{cyc}^+}) > 0$.

A l'instant $t_d^{k_{cyc}^-}$, la loi de commande est U_c , on a de plus $q_{1d}(t_d^{k_{cyc}^-}) = 0$, $\dot{q}_{1d}(t_d^{k_{cyc}^-}) = 0$ et $\ddot{q}_{1d}(t_d^{k_{cyc}^-}) = 0$. Si bien que l'équation (5.33) se simplifie en :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1(t_d^{k_{cyc}^-}) &= b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d) \\ &= - \left([M_{(q)}^{-1}]_{21} C_{11}(q, \dot{q}) + [M_{(q)}^{-1}]_{22} C_{21}(q, \dot{q}) \right) \dot{\tilde{q}}_2 - \gamma_2 [M_{(q)}^{-1}]_{21} \tilde{q}_2 \\ &\quad - \gamma_1 [M_{(q)}^{-1}]_{21} \tilde{q}_2 - [M_{(q)}^{-1}]_{11} (1 + K_f) \lambda_d(t_d^{k_{cyc}^-}) > 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

A l'instant $t_d^{k_{cyc}^+}$, la loi de commande est U_{nc} donc $\lambda_d(t_d^{k_{cyc}^+}) = 0$ dans $b(q, \dot{q}, U_{nc}, \lambda_d)$ exprimé en $t_d^{k_{cyc}}$. Comme la trajectoire désirée doit être deux fois différentiable, choisissons $q_{1d}(t_d^{k_{cyc}^+}) = 0$ et $\dot{q}_{1d}(t_d^{k_{cyc}^+}) = 0$. L'équation (5.33) devient :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1(t_d^{k_{cyc}^+}) &= b(q, \dot{q}, U_{nc}, 0) \\ &= - \left([M_{(q)}^{-1}]_{21} C_{11}(q, \dot{q}) + [M_{(q)}^{-1}]_{22} C_{21}(q, \dot{q}) \right) \dot{\tilde{q}}_2 - \gamma_2 [M_{(q)}^{-1}]_{21} \tilde{q}_2 \\ &\quad - \gamma_1 [M_{(q)}^{-1}]_{21} \tilde{q}_2 + \ddot{q}_{1d}(t_d^{k_{cyc}^+}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

En conclusion la condition pour garantir que $q_1(t) > 0$ sur $(t_d^{k_{cyc}}, t_d^{k_{cyc}} + \epsilon)$, pour $\epsilon > 0$, est que le terme $\ddot{q}_{1d}(t_d^{k_{cyc}^+})$ dans l'équation (5.35) compense la perte du terme $-[M_{(q)}^{-1}]_{11}(1 + K_f)\lambda_d$ dans l'équation (5.34), perte qui est due à la commutation de U_c à U_{nc} . La condition sur la trajectoire désirée en début de phase libre $\Omega_{2k_{cyc}+2}$ est :

$$\ddot{q}_{1d}(t_d^{k_{cyc}^+}) \geq \max \left(0, - [M_{(q(t_d^{k_{cyc}^-)})}^{-1}]_{11} (1 + K_f) \lambda_d(t_d^{k_{cyc}^-}) \right) \quad (5.36)$$

Remarque 7 : Il est intéressant de noter que les deux transitions $\Omega_{2k_{cyc}} \longrightarrow \Omega_{2k_{cyc}+1}$ et $\Omega_{2k_{cyc}+1} \longrightarrow \Omega_{2k_{cyc}+2}$, sont contrôlées par des trajectoires de références q_{1d}^* et λ_d qui violent les conditions de complémentarité, comme vu sur la figure 4.4.

5.1.3 Analyse de stabilité de la boucle fermée

Dans cette section nous allons voir quelles sont les conditions que doivent remplir le système (4.1) et/ou la trajectoire de référence q_d^* pour que le système bouclé soit stable au sens des définitions 2 et 3.

Proposition 6 : Considérons l'hypothèse 1 (de la page 45) satisfaite. Soit le système défini par (4.1) bouclé avec la commande (5.1) et les signaux $q_d(\cdot)$, $q_d^*(\cdot)$ définis en section 4.2. Ce système est :

- (i) - Asymptotiquement fortement stable si $x(0) \in \{CI\}$ ⁽¹⁾.
- (ii) - Asymptotiquement fortement stable si $q_d^*(\cdot)$ est choisi tel qu'à l'instant du premier impact de chaque phase $I_{k_{cyc}}$ on ait $[M_{11}(q(t_0))\dot{q}_1(t_0^-) + \dot{q}_2(t_0^-)^T M_{21}(q(t_0))]\dot{q}_{1d}(t_0^-) \leq 0$.
- (iii) - Asymptotiquement fortement stable si $M_{12} = 0$ et $e_n = 0$.
- (iv) - Asymptotiquement faiblement stable si $M_{12} = 0$ and $0 \leq e_n < 1$.

Preuve de la proposition 6

Preuve du point (i)

La preuve du point i) (tirée de [Brogliato *et al.*, 2000]), se découpe en deux parties, on montre d'abord que le système vérifie les conditions de la proposition 1 pour montrer que le système est faiblement stable. Puis on montre qu'il est fortement stable à l'aide de la proposition 3.

De part la définition du cycle dans (2.3), le point **(a)** de la proposition 1 est vérifié.

D'après l'hypothèse 1, le point **(b)** de la proposition 1 est vérifié.

Pour montrer le point **(c)**, on s'intéresse à l'évolution de $V(\cdot)$ pendant l'accumulation d'impacts $[t_0, t_\infty]$:

$$V(t_\infty) - V(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} V(t_{k+1}) - V(t_k) + \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_V(t_k) \quad (5.37)$$

D'après la définition de $\{CI\}$ ¹ on a $t_0 > \tau_1^{k_{cyc}}$, d'où $\dot{q}_d(t_0^-) = 0$. L'équation (5.30) devient

$$\begin{aligned} \sigma_V(t_k) &= T_L - \frac{1}{2}\gamma_1 q_{1d}(t_k^-)^2 \leq 0 \quad , \text{ pour } k = 0 \\ &= T_L \leq 0 \quad , \text{ pour } k \geq 1 \end{aligned} \quad (5.38)$$

1. Voir la définition 4 page 46 pour $\{CI\}$.

En insérant les inégalités (5.38) et (5.24) dans l'équation (5.37) on obtient que :

$$V(t_\infty) - V(t_0^-) \leq 0 \quad (5.39)$$

D'après les équations (5.13) et (5.31), la fonction $V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ est décroissante sur la phase $I_{k_{cyc}}$ hors de l'accumulation d'impacts, et en utilisant le résultat de l'inégalité précédente on obtient que :

$$V(t_f^{k_{cyc}}) - V(\tau_0^{k_{cyc}}) \leq 0 .$$

Le point (c) de la proposition 1 est vérifié.

D'après les équations (5.8) et (5.12) la fonction $V(\cdot)$ est décroissante sur Ω donc le système vérifie toutes les conditions de la proposition 1. Des équations (5.38) et (5.39) on en déduit que $V(t_{k+1}^-) \leq V(t_k^-)$. Donc d'après la proposition 3 on en déduit que le système est fortement stable au sens de la définition 3.

De plus d'après les équations (5.8) et (5.12), on a que $\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq -\gamma(\|\tilde{q}\|)$ avec $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(\cdot)$ est strictement croissante. Donc le système est asymptotiquement fortement stable.

Remarque 8 : Les situations où $\{CI\} \neq \emptyset$ peuvent être calculées pour des cas simples comme les systèmes à un degré de liberté.

∞

Preuve du point (ii)

Si $[M_{11}(q(t_0))\dot{q}_1(t_0^-) + \dot{q}_2(t_0^-)^T M_{21}(q(t_0))]\dot{q}_{1d}(t_0^-) \leq 0$ alors on a $\dot{q}(t_0^-)^T M(q)\dot{q}_d(t_0^-) \leq 0$ car $\dot{q}_{2d} = 0$. Et d'après l'inégalité (5.30), si $\dot{q}(t_0^-)^T M(q)\dot{q}_d(t_0^-) \leq 0$ alors $\sigma_V(t_0) \leq 0$.

Maintenant nous pouvons utiliser la preuve du point précédent.

∞

Preuve du point (iii)

La preuve du troisième point suit le même raisonnement mais dans ce cas on doit montrer que $\sigma_V(t_0)$ est négatif puisqu'il n'est plus égal à la perte d'énergie cinétique. Considérons la loi d'impact de Moreau (2.2). Puisque $m = 1$, remarquons que :

$$\text{prox}_{M(q(t_0))}[M^{-1}(q(t_0))N_\Phi(q(t_0)); \dot{q}(t_0^-)] = \dot{q}(t_0^-)^T M(q(t_0))n_q n_q \quad (5.40)$$

où $n_q = \frac{M^{-1}(q(t_0))D^T}{\sqrt{DM(q(t_0))D^T}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ correspond au vecteur normal dans la métrique cinétique

[Brogliato, 1999, chapitre 6] et $D = [1 \ 0 \dots 0] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. A partir de l'équation (5.40) et en utilisant le complément de Schur pour calculer $M^{-1}(q(t_0))$ [Horn & Johnson, 1999, p.472], on obtient :

$$\text{prox}_{M(q(t_0))}[M^{-1}(q(t_0))N_\Phi(q(t_0)); \dot{q}(t_0^-)] = \dot{q}_1(t_0^-) \begin{pmatrix} 1 \\ M_{22}^{-1}(q(t_0))M_{12}^T(q(t_0)) \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

En insérant (5.41) dans (2.2) on calcule que :

$$\begin{cases} \sigma_{\dot{q}_1}(t_k) = -(1 + e_n)\dot{q}_1(t_k^-) \\ \sigma_{\dot{q}_2}(t_k) = (1 + e_n)M_{22}^{-1}(q(t_k))M_{12}^T(q(t_k))\dot{q}_1(t_k^-) \end{cases} \quad (5.42)$$

Des équations (5.42) et (5.30), et, après quelques calculs, on trouve que :

$$\begin{cases} \sigma_V(t_0) = \frac{e_n^2 - 1}{2} [M_{11}(q(t_0)) - M_{12}(q(t_0))M_{22}^{-1}(q(t_0))M_{12}^T(q(t_0))] \dot{q}_1^2(t_0^-) \\ \quad - \frac{1}{2} M_{11}(q(t_0)) \dot{q}_{1d}^2(t_0^-) + M_{11}(q(t_0)) \dot{q}_1(t_0^-) \dot{q}_{1d}(t_0^-) \\ \quad + \dot{q}_2(t_0^-)^T M_{21}(q(t_0)) \dot{q}_{1d}(t_0^-) - \frac{1}{2} \gamma_1 \dot{q}_{1d}^2(t_0^-) \end{cases} \quad (5.43)$$

Si $e_n = 0$ et $M_{21} = 0$, alors l'équation (5.43) devient :

$$\sigma_V(t_0) = -\frac{1}{2} M_{11}(q(t_0)) \dot{q}_1^2(t_0^-) - \frac{1}{2} \gamma_1 \dot{q}_{1d}^2(t_0^-) \leq 0 \quad (5.44)$$

Et donc la stabilité forte est assurée et le troisième point est vérifié.

∞

Preuve du point (iv)

Si $M_{12} = 0$ et $0 \leq e_n < 1$, la fonction $V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ peut se décomposer en deux fonctions $V_1(t, \tilde{q}_1(t), \dot{\tilde{q}}_1(t))$ et $V_2(t, \tilde{q}_2(t), \dot{\tilde{q}}_2(t))$:

$$\begin{aligned} V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = V_1(t, \tilde{q}_1, \dot{\tilde{q}}_1) + V_2(t, \tilde{q}_2, \dot{\tilde{q}}_2) &= \frac{1}{2} M_{11}(q(t_0)) \dot{\tilde{q}}_1^2(t) + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}_2(t)^T M_{22}(q(t_0)) \dot{\tilde{q}}_2(t) \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}_1^2(t)}_{V_1(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}_2(t)^T \tilde{q}_2(t)}_{V_2(t)} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Dans l'équation (5.45), $V_2(t)$ et $V_1(t)$ sont découplées. De plus d'après l'équation (5.42) $V_2(t)$ est une fonction continue et $\dot{V}_2(t) \leq 0$ pour tout t , donc $V_2(t_\infty) \leq V_2(\tau_0^{k_{cyc}})$. Comme $V_1(t_\infty) = 0 \leq V_1(\tau_0^{k_{cyc}})$ alors on a :

$$V(t_\infty) \leq V(\tau_0^{k_{cyc}}) \quad (5.46)$$

Le point (iv) de la proposition 6 est vérifié. ■

5.1.4 Conclusion

Dans cette section, on a vu l'extension possible de la loi de [Paden & Panja, 1988] au cas de la poursuite de systèmes non réguliers. On a montré la stabilité de la boucle fermée à l'aide de la proposition 1. Au vu des résultats obtenus dans la proposition 6, on constate que la difficulté principale du contrôle de tels systèmes est surtout liée aux couplages M_{12} entre les coordonnées contraintes (q_1) et non-contraintes (q_2). En effet si $M_{12} = 0$ dans la proposition 6, les points (iii) et (iv) nous garantissent la stabilité de la boucle fermée. Alors que les points (i) et (ii) requièrent des conditions supplémentaires qui semblent difficiles à obtenir pour des systèmes de dimension $n \geq 2$. C'est pourquoi nous allons développer, dans la section suivante, une commande qui s'appuie sur le résultat de la proposition 2 relative au loi de commande à décroissance exponentielle.

5.2 Loi à décroissance exponentielle

5.2.1 Adaptation de la loi de Slotine-Li

Nous allons développer dans cette section une boucle de commande qui pourra être analysée à l'aide de la proposition 2 page 31. La loi de commande utilisée dans cette section a globalement la même structure que sur les figures 4.1 - 4.2, dans laquelle le bloc "contrôleur non linéaire" est basé sur le contrôleur présenté dans [Slotine & Li, 1988]. Soit la loi suivante :

$$T(q)U = \begin{cases} U_{nc} = M(q)\ddot{q}_r + C(q,\dot{q})\dot{q}_r + G(q) - \gamma_1 s \\ U_t = U_{nc} & \text{avant le premier impact} \\ U_t = M(q)\ddot{q}_r + C(q,\dot{q})\dot{q}_r + G(q) - \gamma_1 \bar{s} & \text{après le premier impact} \\ U_c = U_{nc} - P_d + K_f(P_q - P_d) \end{cases} \quad (5.47)$$

Où $s = \dot{q} + \gamma_2 \tilde{q}$, $\bar{s} = \dot{\bar{q}} + \gamma_2 \bar{q}$ avec $\bar{q} = q - q_d^*$, $\dot{q}_r = \dot{q}_d - \gamma_2 \tilde{q}$, $\gamma_2 > 0$ et $\gamma_1 > 0$ sont deux gains scalaires, $K_f > 0$, $P_d = D^T \lambda_d$ est la force de contact désirée pendant la phase de contact permanent.

Hypothèse 2 : Le contrôleur U_t dans (5.47) assure que la suite $\{t_k\}_{k \geq 0}$ des instants d'impacts existe, et avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = t_\infty < +\infty$.

Fonction de Lyapunov

Considérons les deux fonctions positives suivantes :

$$\begin{aligned}
 V_1(t,s) &= \frac{1}{2}s(t)^T M(q)s(t) \\
 V_2(t,s,\tilde{q}) &= \frac{1}{2}s(t)^T M(q)s(t) + \gamma_2\gamma_1\tilde{q}(t)^T\tilde{q}(t)
 \end{aligned}
 \tag{5.48}$$

Pour les situations où $\Phi = \mathbb{R}^n$, n'importe laquelle des deux fonctions $V_1(\cdot)$ et $V_2(\cdot)$ peut être utilisée pour montrer la stabilité du système (4.1) (5.47) [Lozano *et al.*, 2000, §6.2.5] [Spong *et al.*, 1990].

Dans la situation qui nous intéresse ici, on a $\Phi \subset \mathbb{R}^n$. Ceci complique beaucoup l'étude, et comme nous allons le voir, les deux fonctions sont nécessaires pour l'analyse de stabilité.

5.2.2 Condition de stabilité

Dans cette section nous allons voir quelles sont les conditions de stabilité du système (4.1) bouclé avec la commande (5.47). La proposition 8 donne un résultat pour le cas général $e_n \neq 0$, mais avec des hypothèses sur $\|\tilde{q}(\tau_0^{k_{cyc}})\|$ ou sur $\|\tilde{q}_2(t_{k+1})\| \leq \|\tilde{q}_2(t_k)\|$. Alors que la proposition 10 ne donne un résultat que pour les chocs plastiques ($e_n = 0$) mais sans ces hypothèses. La proposition 7 n'est qu'un calcul préliminaire nécessaire à la preuve de la proposition 8.

Remarquons que la proposition 7 s'appuie sur $V_2(\cdot)$, alors que le point (i) de la proposition 8 est basé sur l'utilisation de $V_1(\cdot)$ et du choix de $x(t) = s(t)$ comme variable d'état du système bouclé.

Proposition 7 (Majorants) : *Soit le système bouclé (4.1) (5.47) sur l'intervalle de temps $[\tau_0^{k_{cyc}}, t_0]$, et avec le choix de $q_{1d}^*(\cdot)$ dans les équations (A.3) (A.4) (A.5) de l'annexe A. Alors on a les deux propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad |q_{1d}^*(t_0)| &\leq \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2\gamma_1}} \\
 (ii) \quad |q_{1d}^*(t_0^-)| &\leq K_0 V_2^{1/4}(\tau_0^{k_{cyc}})
 \end{aligned}$$

avec $K_0 \geq 0$. ■

Preuve

La preuve de la proposition 7 est donnée dans l'annexe A.

Après les calculs préliminaires de la proposition 7, nous pouvons énoncer la proposition suivante relative à la stabilité de l'extension de la loi de [Slotine & Li, 1988].

Proposition 8 (chocs élastiques) : Supposons que l'hypothèse 2 soit vérifiée, que $e_n \in (0,1)$ et que q_{1d}^* soit défini comme dans (A.3)-(A.5). Considérons le système défini par (4.1) bouclé avec le contrôleur (5.47).

- (i) - Si le contrôleur $T(q)U$ dans (5.47) assure que $\|\tilde{q}(\tau_0^{k_{cyc}})\| < \epsilon$, $\epsilon > 0$ pour tout k au cours des cycles, alors le système initialisé sur Ω_0 avec $V_2(\tau_0^0) \leq 1$ vérifie les prérequis de la proposition 2 et il est donc pratiquement faiblement stable sur Ω en choisissant $x(\cdot) = s(\cdot)$ la variable d'état en boucle fermée.
- (ii) - Si le contrôleur $T(q)U$ dans (5.47) assure que $\|\tilde{q}_2(t_{k+1})\| \leq \|\tilde{q}_2(t_k)\|$, pour tout t_k sur $[t_0, t_\infty)$, alors le système initialisé sur Ω_0 avec $V_2(\tau_0^0) \leq 1$ vérifie les prérequis de la proposition 2 et il est donc pratiquement faiblement stable sur Ω en choisissant $x(\cdot) = [s(\cdot), \tilde{q}(\cdot)]$ la variable d'état en boucle fermée. ■

Remarquons que ϵ dans le résultat (i) ne doit pas nécessairement être petit, il est cependant important que ϵ soit indépendant du cycle k_{cyc} . Notons aussi que $V_1(t) \leq V_2(t)$ pour tout $t \geq 0$ et donc $V_1(\tau_0^0) \leq V_2(\tau_0^0) \leq 1$ dans (i).

Preuve

La preuve de la proposition 8 est donnée dans l'annexe B.

Le résultat de la proposition 8 est énoncé pour les variables d'états $x(\cdot) = s(\cdot)$ ou $x(\cdot) = [s(\cdot), \tilde{q}(\cdot)]$, alors que l'état qui nous intéresse dans notre problème de poursuite de trajectoires est $x(\cdot) = [\tilde{q}(\cdot), \dot{\tilde{q}}(\cdot)]$. Soit la proposition suivante :

Proposition 9 : Soit le système bouclé (4.1) (5.47) vérifiant un des deux points de la proposition 8. Alors l'erreur de poursuite vérifie $\|\tilde{q}(t)\| \leq 2R$ et $\|\dot{\tilde{q}}(t)\| \leq (1 + 2\gamma)R$ pour tout $t \in \Omega$, $\|s(t)\| \leq R$ pour tout $t \in \Omega$, avec $R = \left(\frac{2}{\lambda_{\min}(M(q))} e^{-\gamma(t_f^{k_{cyc}} - t_\infty)} (1 + K + \epsilon') \right)^{\frac{1}{2}} (1)$. ■

Preuve

D'après la définition de $s(t)$ on a $\tilde{q} = \frac{1}{p+1}s$ où $p \in \mathbb{C}$ est la variable de Laplace. Donc sur l'intervalle $[t_f^{k_{cyc}}, t)$ avec $t \in \Omega$, $\tilde{q}(t)$ correspond à la réponse d'un filtre linéaire d'entrée $s(\cdot)$. On obtient :

$$\tilde{q}(t) = e^{-(t-t_f^{k_{cyc}})} s(t_f^{k_{cyc}}) + \int_{(t_f^{k_{cyc}}, t)} e^{-(t-\tau)} s(\tau) d\tau \quad (5.49)$$

1. L'expression de R est tirée de l'équation B.24 en page 114.

L'égalité (5.49) implique l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{q}(t)\| \leq \|s(t_f^{k_{cyc}})\| + e^{-t}(t - t_f^{k_{cyc}})\|s\|_\infty \quad (5.50)$$

où $\|x\|_\infty = \sup_{t \geq t_f^{k_{cyc}}} |x(t)|$ est la norme \mathcal{L}_∞ . D'après la proposition 8, on a $\|s\| \leq R$ donc l'inégalité (5.50) devient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}(t)\| &\leq [1 + e^{-t}(t - t_f^{k_{cyc}})]R \\ &\leq 2R \end{aligned} \quad (5.51)$$

D'après la définition de $s(t)$ on a $\dot{\tilde{q}}(t) = s(t) - \gamma_2 \tilde{q}(t)$ donc

$$\|\dot{\tilde{q}}(t)\| \leq \|s(t)\| + \gamma_2 \|\tilde{q}(t)\| \quad (5.52)$$

En insérant l'inégalité (5.51) dans (5.52), et en utilisant le fait que $\|s\| \leq R$, on obtient

$$\|\dot{\tilde{q}}(t)\| \leq [1 + 2\gamma_2]R \quad (5.53)$$

■

Les hypothèses des propositions 8 et 9 sont assez restrictives et difficiles à vérifier a priori. On étudie donc dans la proposition suivante un cas où l'on peut lever ces hypothèses.

Proposition 10 (chocs plastiques) : *Supposons que l'hypothèse 2 soit satisfaite, que $e_n = 0$ et que q_{1d}^* soit défini comme dans (A.3)-(A.5). Le système défini par la dynamique (4.1) bouclée avec le contrôleur (5.47), initialisé sur Ω_0 avec $V_2(\tau_0^0) \leq 1$ vérifie les prérequis de la proposition 2 et il est donc pratiquement faiblement stable sur Ω en choisissant $x(\cdot) = [s(\cdot), \tilde{q}(\cdot)]$ la variable d'état en boucle fermée.* ■

Preuve

Comme $e_n = 0$, il n'y a qu'un seul impact par phase $I_{k_{cyc}}$, et donc le point (b) de la proposition 2 n'a plus de sens et n'est donc plus nécessaire. Les points (a) et (d) sont démontrés dans la preuve de la proposition 8(ii).

Donc le système (4.1) bouclé avec le contrôleur (5.47) satisfait tous les prérequis de la proposition 2 avec $\epsilon \neq 0$. Par conséquent le système est pratiquement faiblement stable sur Ω avec $x(\cdot) = [s(\cdot), \tilde{q}(\cdot)]$. ■

5.2.3 Conclusion

Dans cette section, en utilisant un schéma de contrôle dérivé de la loi de [Slotine & Li, 1988] on a donné un résultat de stabilité pour le cas des chocs plastiques (voir proposition 10). La proposition 8 donne des résultats pour des chocs élastiques mais sous réserve de quelques

hypothèses. Ces limitations sont encore une fois la conséquence des couplages dans la matrice d'inertie ($M_{12} \neq 0$). En effet la condition $\|\tilde{q}_2(t_{k+1})\| \leq \|\tilde{q}_2(t_k)\|$ de la proposition 8 devient inutile dans le cas d'un système sans couplage ($M_{12} = 0$). ⁽¹⁾

5.3 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons étendu les lois de [Paden & Panja, 1988] et [Slotine & Li, 1988] au cas de la poursuite de trajectoire pour des systèmes mécaniques non-réguliers. Les résultats des propositions 6, 8 et 10 montrent que les deux difficultés majeures pour le contrôle de tels systèmes sont :

- les couplages dans la matrice d'inertie $M_{12} \neq 0$.
- Les chocs élastiques $e_n \neq 0$.

Dans le chapitre suivant, nous allons vérifier numériquement les résultats de stabilité de ces lois sur des simulations.

1. On rappelle que cette difficulté engendrée par les couplages au moment de l'impact ne peut pas être réglée simplement en utilisant une loi de commande découplante. En effet au moment de l'impact la dynamique du système est régie par la dynamique d'impact $M(q(t_k))\sigma_{\dot{q}}(t_k) = P(t_k)$ (où $P(\cdot)$ correspond à la percussion). La commande n'intervient pas au moment de l'impact.

Chapitre 6

Simulations

Dans ce chapitre nous allons voir le comportement des deux lois de commande vues précédemment, lors d'essais en simulation. La première section présente le simulateur et les choix de méthodes numériques utilisées. La seconde section présente les résultats de simulation pour les deux lois, ainsi qu'une étude de robustesse vis-à-vis des paramètres dynamiques, de la méconnaissance de la position de la contrainte.

6.1 Présentation de la simulation

6.1.1 Bras manipulateur à 2ddl

Le système contrôlé dans cette étude est un bras manipulateur plan à deux degrés de liberté (voir figure 6.1). Les données numériques utilisées lors de la simulation sont données dans le tableau 6.1.

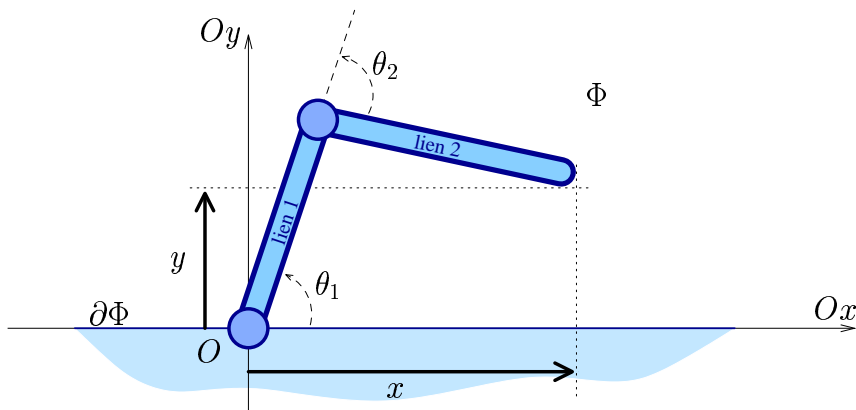


FIG. 6.1 – Robot manipulateur plan à deux degrés de liberté

Nous allons étudier le comportement de la loi de commande définie en (4.3). Le système de coordonnées généralisées à utiliser pour avoir la dynamique sous la même forme qu'en (4.1) sont les coordonnées du point de contact avec la contrainte (c'est-à-dire l'extrémité du lien 2 sur la figure 6.1). On prendra donc :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, \quad y \geq 0$$

On ne considère qu'une seule contrainte unilatérale associée à l'extrémité du bras ($y \geq 0$), c'est-à-dire que l'on ne considère pas le cas où une autre partie du bras viendrait en contact avec le sol.

	lien 1	lien 2
Longueur	$l_1 = 0.5 \text{ m}$	$l_2 = 0.5 \text{ m}$
Inertie	$I_1 = 1 \text{ kg.m}^2$	$I_2 = 1 \text{ kg.m}^2$
Masse	$m_1 = 1 \text{ kg}$	$m_2 = 1 \text{ kg}$
Gravité	$g = 9.81 \text{ m.s}^{-1}$	
Restitution	$e_n = 0.7$	
Frottement	$\mu = 0$	

TAB. 6.1 – Valeurs numériques utilisées dans le simulateur

Pour ces simulations, le système doit accomplir des tâches cycliques telles que celles décrites sur la figure 6.2. La trajectoire non contrainte est un cercle qui viole la contrainte : il existe donc une phase de mouvement libre, et une phase de mouvement complètement contraint durant laquelle on impose une force de contact λ_d .

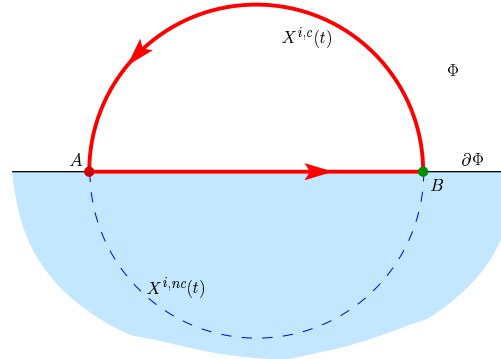


FIG. 6.2 – Trajectoires de références - un demi cercle

6.1.2 Méthodes numériques utilisées

Pour la dynamique

La dynamique du bras manipulateur est simulée à l'aide d'un schéma "Event-Driven"¹. Le simulateur développé pour cette étude est basé sur la même architecture que celle proposée par [Wieber, 2000] pour la simulation de robots bipèdes. L'ensemble des matrices d'inertie,

1. "simulation par événements": simulateur basé sur la détection des événements (impact, décollage, glissement...).

de Coriolis, de gravité... nécessaires à la simulation sont obtenues à l'aide de l'ensemble de script *Maple*: Robotdyn [Génot, 1998], le tout est intégré grâce au logiciel de calcul numérique *Scilab* [Consortium Scilab, 2004].

Ce schéma est de type "Event-Driven", c'est-à-dire que le simulateur intègre la dynamique du système de façon classique en calculant à chaque instant l'accélération du système résultant de l'équation (2.1). En même temps le simulateur surveille si une contrainte risque d'être violée ou pas. Si c'est le cas, l'intégration s'arrête et une nouvelle intégration redémarre avec les nouvelles valeurs de vitesses obtenues à l'aide de la loi de chocs (2.2).

Le calcul des nouvelles vitesses post-impact se fait à l'aide de l'algorithme de minimisation sous contrainte Fsqp [Lawrence *et al.*, 1998]. En effet d'après l'équation (2.2), pour obtenir les vitesses post-impact il faut calculer :

$$\arg \min_{z \in T_{\Phi}(X(t_k))} \frac{1}{2} [z - \dot{X}(t_k^-)]^T M(X(t_k)) [z - \dot{X}(t_k^-)]$$

Pour les trajectoires de références

L'autre point délicat de la simulation est la génération des trajectoires de référence X_d^* . En effet comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, tous les instants de commutation entre les différents modes de (2.3) ne sont pas fixés a priori mais dépendent de l'état du système (les instants notés $t_i^{k_{cyc}}$). Cela veut dire que les trajectoires doivent être calculées en ligne. De plus ces trajectoires doivent être deux fois différentiables. Pour ce faire nous avons utilisé des polynômes de degré 6 ainsi que des courbes de Bézier.

Une étude approfondie des problèmes relatifs à la simulation numérique de systèmes mécaniques non réguliers se trouve dans [Brogliato *et al.*, 2002].

6.2 Résultats de simulation

Dans cette section nous présentons les résultats de simulations relatifs aux deux lois de commandes vues précédemment. Le tableau 6.2 regroupe les valeurs des gains utilisés pour chaque simulation.

Sur ce premier essai on utilise la loi de Slotine-Li avec des gains $\gamma_1 = 5$ et $\gamma_2 = 0.5$. La période du cycle (Pe) est de 16 secondes. La figure 6.3 représente la trajectoire du système dans le plan Oxy , on retrouve bien le demi cercle souhaité sur la figure 6.2. Les déformations de la trajectoire, normalement en forme de demi cercle, au cours des phases de stabilisation et de décollage sont dues au fait que lors de ces phases les instants t_∞ et t_d^k ne sont pas connus ("state-base time"). Il se produit donc un petit décalage entre les trajectoires q_{1d}^* et q_{2d}^* par rapport au demi cercle parfait. Il est donc nécessaire de générer en ligne des morceaux de trajectoire qui rattrapent ces erreurs.

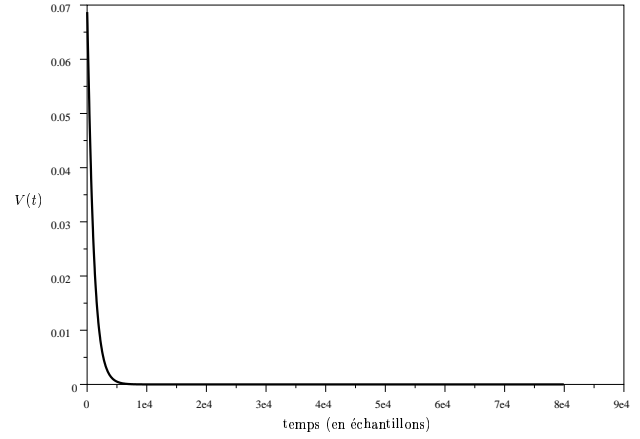
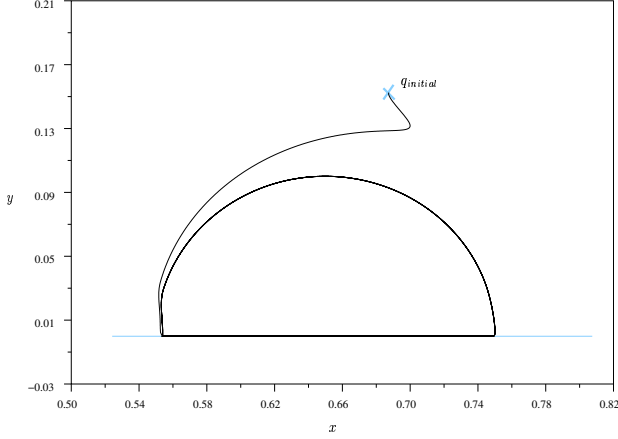


FIG. 6.3 – n° 1 : Trajectoire dans le plan Oxy FIG. 6.4 – n° 1 : Fonction de Lyapunov $V(t)$

Sur cet essai, le période d'évolution du cycle est assez importante, et comme la décroissance de la fonction de Lyapunov est assez rapide (voir figure 6.4), le système rattrape vite la trajectoire de référence. Et l'effet des discontinuités au moments des impacts n'est plus visible. Pour la suite des tests nous allons prendre une période de parcours des cycles plus petite ($Pe = 4s$). Ceci nous permet de mettre en évidence les deux aspects de la convergence : l'aspect continu et l'aspect discret. En contre-partie la forme des trajectoires dans le plan Oxy sera déformée.

6.2.1 La loi de Paden-Panja

Cette section traite des simulations du schéma de commande basé sur la loi de [Paden & Panja, 1988].

Dans un premier temps, on compare notre stratégie (pour $\alpha = 100$) avec l'approche tangentielle (ce qui correspond à fixer $\alpha = 0$). Sur la figure 6.5, on constate que l'approche tangentielle demande un temps de stabilisation sur $\partial\Phi$ très long ($\approx 25s$) bien que l'on soit dans le cas idéal (connaissance parfaite des inerties et de la position de la contrainte). Sur la figure 6.6, on obtient les résultats pour le même essai (même gains, même conditions initiales) avec cette fois $\alpha = 100$, on constate que le fait de forcer le système à percuter la contrainte diminue le temps de stabilisation sur $\partial\Phi$.

De plus la figure 6.6 illustre bien le double aspect de convergence de notre schéma de commande :

- l'aspect continu, c'est-à-dire que d'une part $q(t)$ tend vers $q_d^*(t)$. Ceci est surtout visible sur le graphe de $q_2(t)$.
- et d'autre part l'aspect discret, c'est-à-dire que le signal $q_d^*(t)$ tend vers l'approche tangentielle au cours des cycle k_{cyc} . Sur le graphe de $q_{1d}^*(t)$ on remarque que le palier fixé à $-\alpha V(\tau_0^{k_{cyc}})$ diminue de plus en plus lorsque k_{cyc} augmente.

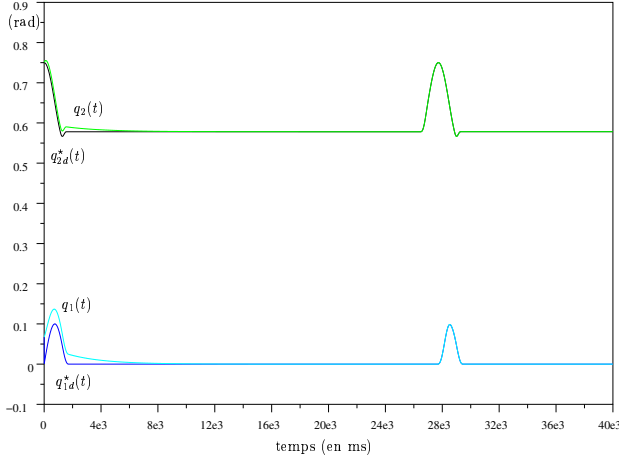


FIG. 6.5 – n° 2 : $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 0$

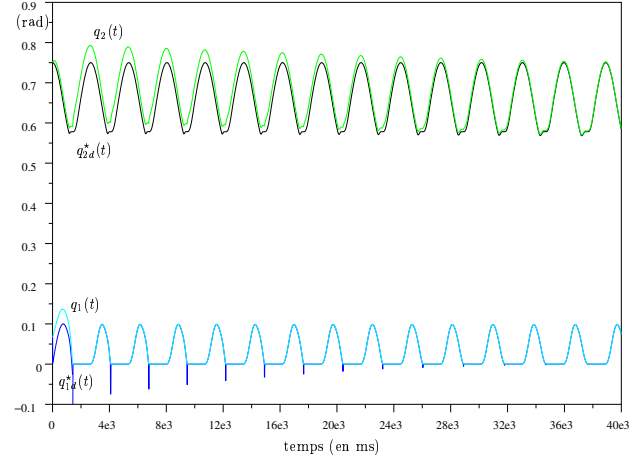


FIG. 6.6 – n° 3 : $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 100$

La figure 6.7 montre l'évolution de la fonction de Lyapunov $V(t)$ au cours des cycles. Encore une fois, on retrouve bien l'aspect de convergence discrète: plus la trajectoire $q_d^*(t)$ se rapproche de l'approche tangentielle et moins importants sont les impacts (les sauts $\sigma_V(t_0)$ diminuent d'amplitude de cycles en cycles).

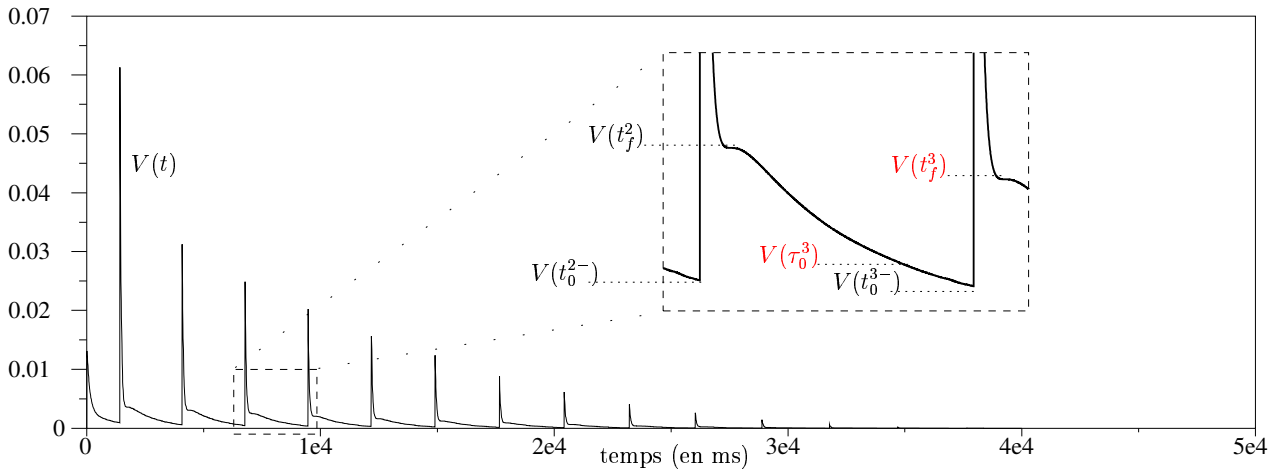


FIG. 6.7 – n° 3 : Evolution de la fonction de Lyapunov

Bien que cet essai converge asymptotiquement vers l'approche tangentielle, on constate sur le zoom de la figure 6.7 que l'évolution de $V(t)$ ne remplit pas les conditions de la proposition 1. Le point **c**) impose d'avoir $V(x(t_f^{k_{cyc}}), t_f^{k_{cyc}}) \leq V(x(\tau_0^{k_{cyc}}), \tau_0^{k_{cyc}})$, or ici nous avons $V(t_f^3) > V(\tau_0^3)$. Ceci est normal puisque notre commande ne satisfait pas a priori les conditions de

la proposition 6: nous avons $M_{12} \neq 0$; et les trajectoires du système n'ont pas de raison de vérifier les points (i) et (ii) de cette même proposition 6. La loi reste convergente car la durée des phases Ω_k est suffisamment longue pour avoir $V(t_0^{k+1-}) \leq V(t_0^k-)$

Couplages entre $q_1(t)$ et $q_2(t)$

La figure 6.8 illustre les couplages dans la matrice d'inertie entre les coordonnées contraintes q_1 et non contraintes q_2 . A l'instant d'impact t_0 , on observe un saut de la vitesse $\dot{q}_2(t_0)$.

Trajectoires de référence

La figure 6.9 montre les trajectoires du système dans le plan Oxy . On constate que le système converge vers un cycle limite. Ce cycle est assez déformé par rapport au demi-cercle de référence. Cette déformation est due aux phases de gelage de $q_{2d}(t)$ et aux phases de décollage. Sur la figure 6.3 on peut voir un essai où ces phases ont moins d'importance (c'est-à-dire que la durée des transitions est négligeable par rapport à la durée complète du cycle). En définitive, du point de vue de l'utilisateur, la véritable erreur de poursuite est $X^{i,nc} - X$ (sachant que X tend vers $X^{i,c}$ au cours des cycles). L'utilisateur peut réduire cette erreur en augmentant la durée du cycle Pe , ainsi qu'en améliorant la génération des trajectoires de références $q_{2d}^*(t)$ autour des instants d'impact et de décollage.

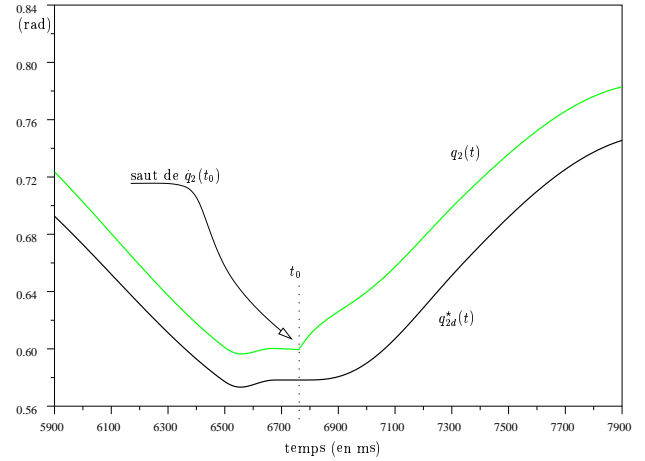


FIG. 6.8 – n° 3: Couplages entre $q_1(t)$ et $q_2(t)$

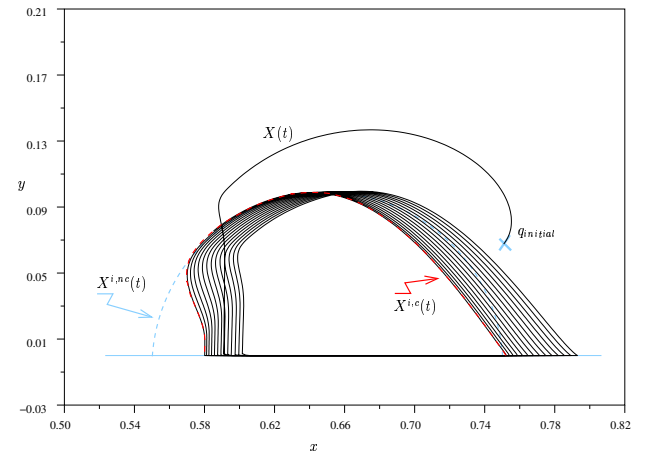


FIG. 6.9 – n° 3: Trajectoires dans le plan Oxy

Influence du paramètre α

Les figures 6.6, 6.10 et 6.11 montrent l'influence du paramètre α pour des valeurs respectivement de 100, 75 et 50. On en conclut que réduire α permet de réduire le temps de la convergence discrète. Par contre réduire trop α risque de nous placer dans une situation similaire au cas de l'approche tangentielle si le palier $-\alpha V(\tau_0^k)$ est trop faible par rapport à

l'erreur de position sur $q_1(t)$ et par rapport à la vitesse de convergence (fixée par les gains γ_1 et γ_2). Voir le détail de la phase d'approche sur le zoom de la figure 6.11.

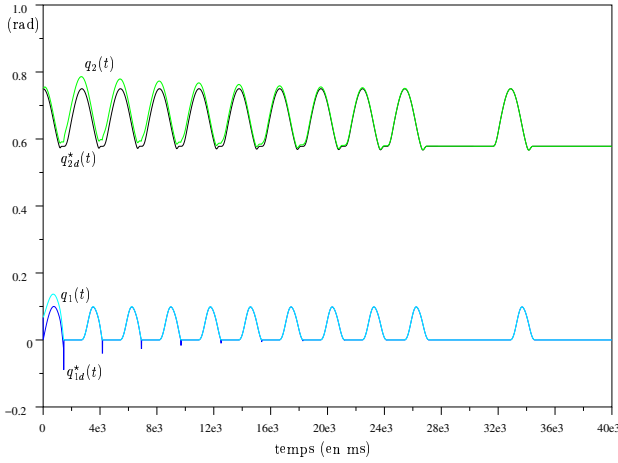


FIG. 6.10 – $n^\circ 4$: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 75$

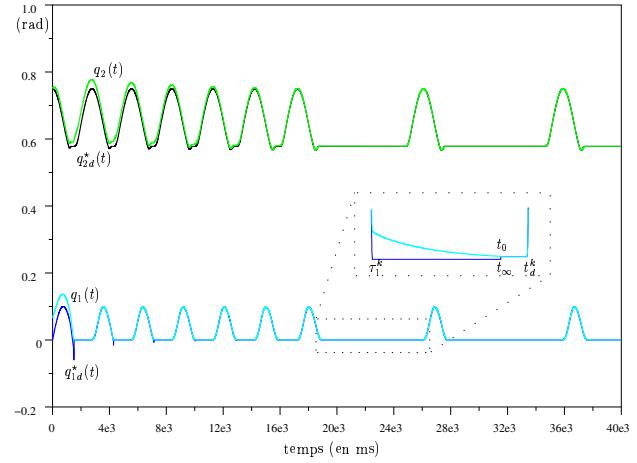


FIG. 6.11 – $n^\circ 5$: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 50$

Cas instable

Comme vu précédemment ce système ne vérifie pas les conditions de la proposition 6. Si, par exemple, on diminue la valeur des gains γ_1 et γ_2 , alors la durée des phases Ω_k devient trop faible vis-à-vis de la vitesse de convergence. Ceci est illustré sur les figures 6.12 et 6.13.

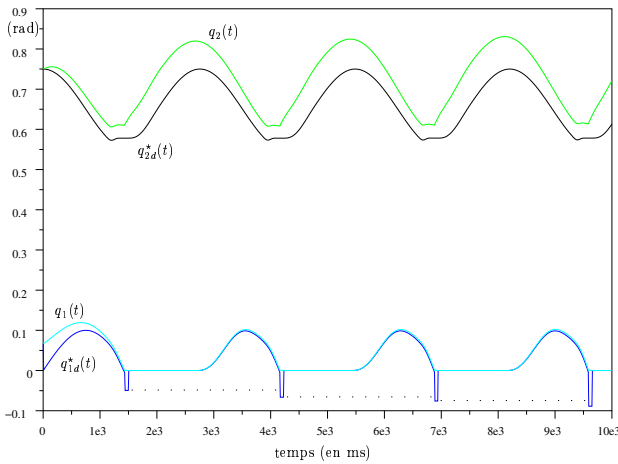


FIG. 6.12 – $n^\circ 6$: Exemple de cas instable

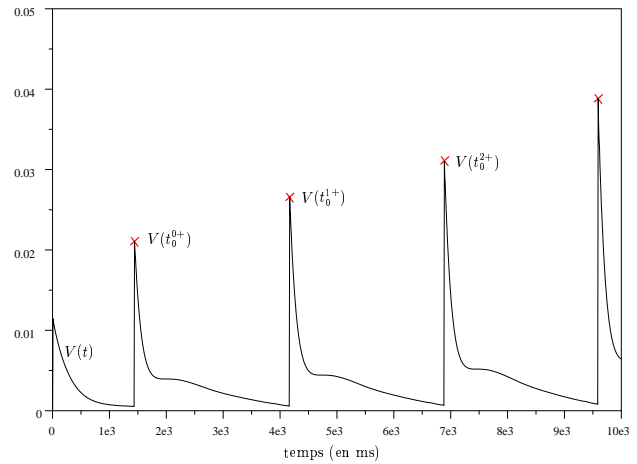


FIG. 6.13 – $n^\circ 6$: Divergence de la fonction $V(t)$

C'est pour résoudre ceci que nous avons développé le schéma de commande basé sur la loi de Slotine-Li. Ce second schéma définit la durée N minimum de la phase I_k pour conserver la stabilité.

6.2.2 La loi de Slotine-Li

Cette section traite des simulations du schéma de commande basé sur la loi de [Slotine & Li, 1988]. Une nouvelle fois on compare ce schéma à l'approche tangentielle, et on constate sur les figures 6.14 et 6.15 que le fait d'imposer un impact favorise la stabilisation sur $\partial\Phi$.

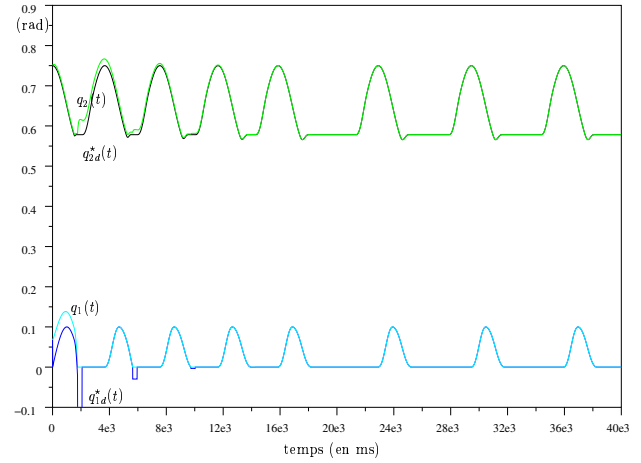
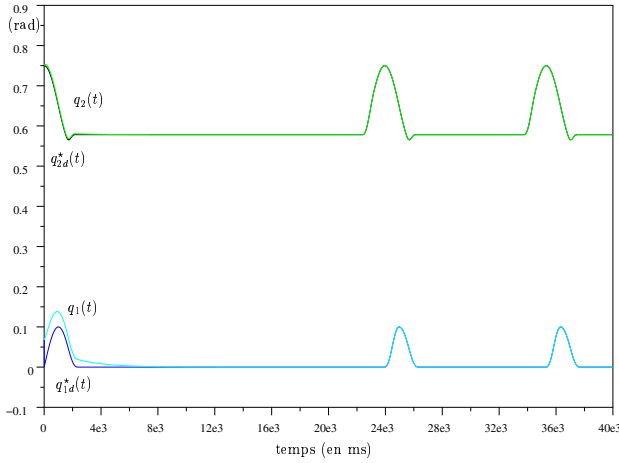


FIG. 6.14 – n° 7: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 0$ FIG. 6.15 – n° 8: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $\alpha = 100$

La figure 6.16 montre l'évolution de la fonction de Lyapunov $V(t)$. On constate que l'amplitude des sauts de $V(t)$ diminue asymptotiquement: $V(t_0^{0+}) = 1.4e^{-1}$, $V(t_0^{1+}) = 6e^{-3}$, $V(t_0^{2+}) = 4e^{-4}$, $V(t_0^{3+}) = 1e^{-5}$ etc.

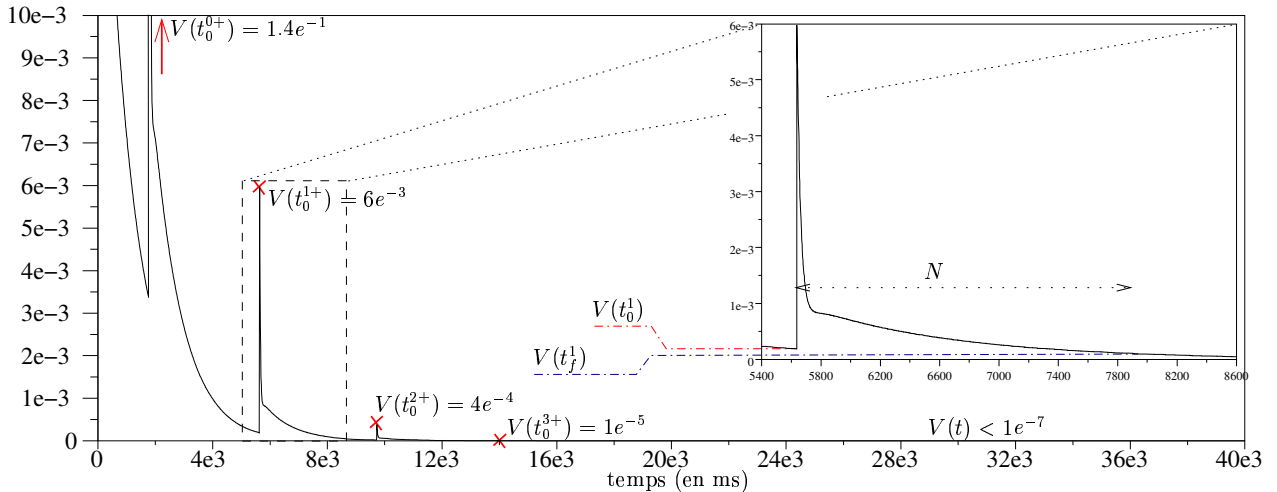


FIG. 6.16 – n° 8: Evolution de la fonction de Lyapunov

On visualise sur le zoom de cette figure, la durée maximum de la phase I_1 pour assurer

que $V(t_f) \leq V(t_0^1)$. Sur cette simulation nous avons des durées d'attente respectivement de 1.02s, 1.68s, 1.53s et 1.25s pour les cycles I_0 , I_1 , I_2 et I_3 . On a déterminé théoriquement que cette durée est inférieure ou égale à la valeur de N donnée dans l'expression (3.7) de la page 32.

Dans l'exemple suivant, le premier impact du cycle (à l'instant t_0) se produit alors que $\dot{q}_{1d}^* = 0$ (voir figure 6.17). C'est-à-dire que l'on est dans le cas où $t_0 \geq \tau_1^k$, ceci correspond à la situation la plus favorable puisque le saut de $V(t)$ en t_0 devient négatif (voir figure 6.18).

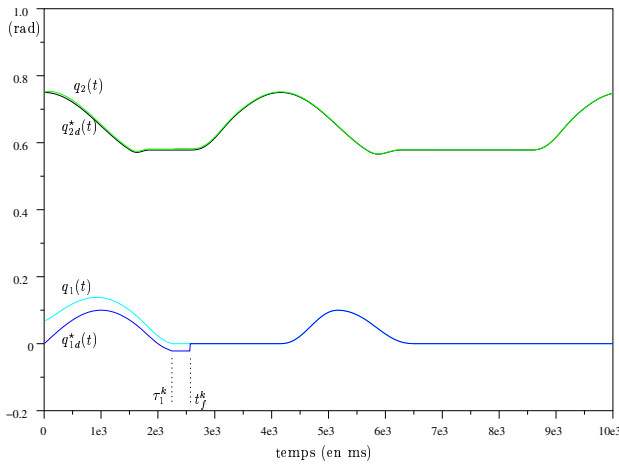


FIG. 6.17 – n° 9: $q_d^*(t)$ et $q(t)$ pour $t_0 \geq \tau_1^k$

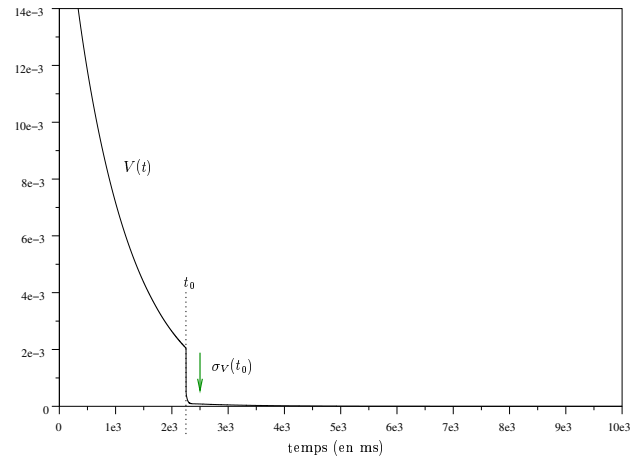


FIG. 6.18 – n° 9: Saut négatif de $V(t)$

6.2.3 Robustesse

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude de la robustesse de ces deux schémas de commande. Nous allons étudier deux aspects de la robustesse :

- La méconnaissance du modèle, en utilisant des inerties différentes dans la partie simulation et dans la partie commande du simulateur.
- La méconnaissance de la position de la contrainte.

Erreur dans le modèle

Pour ces exemples on utilise le même modèle que celui décrit dans le tableau 6.1 pour la partie simulation, par contre pour la partie commande on utilise un modèle où $m_1 = m_2 = 1.3\text{kg}$, soit une différence de 30%.

La figure 6.19 retrace l'évolution du système avec le schéma de commande basé sur la loi de Paden-Panja. On constate sur le zoom de la figure 6.19 que l'écart de modélisation de +30% induit une erreur non négligeable du suivi de trajectoire. Cette erreur se traduit sur la fonction de Lyapunov (figure 6.20) par la présence d'impacts pour tous les cycles. On n'obtient plus de stabilité asymptotique.

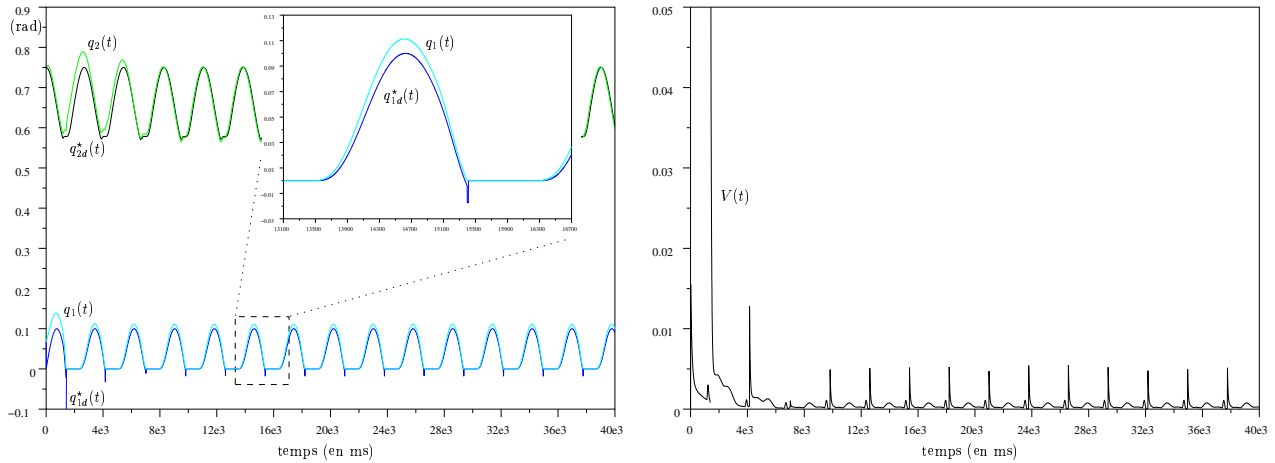


FIG. 6.19 – n° 10: Robustesse - $q_d(t)$ et $q(t)$ FIG. 6.20 – n° 10: Robustesse - fonction $V(t)$

Les figures 6.21 et 6.22 reprennent le même essai de robustesse pour le schéma de commande basé sur la loi de Slotine-Li. On retrouve des résultats comparables à ceux de la loi de Paden-Panja, avec des erreurs de suivi beaucoup plus faibles. Les sauts de $V(t)$ sont de l'ordre de $3e^{-4}$ contre près de $5e^{-3}$ précédemment.

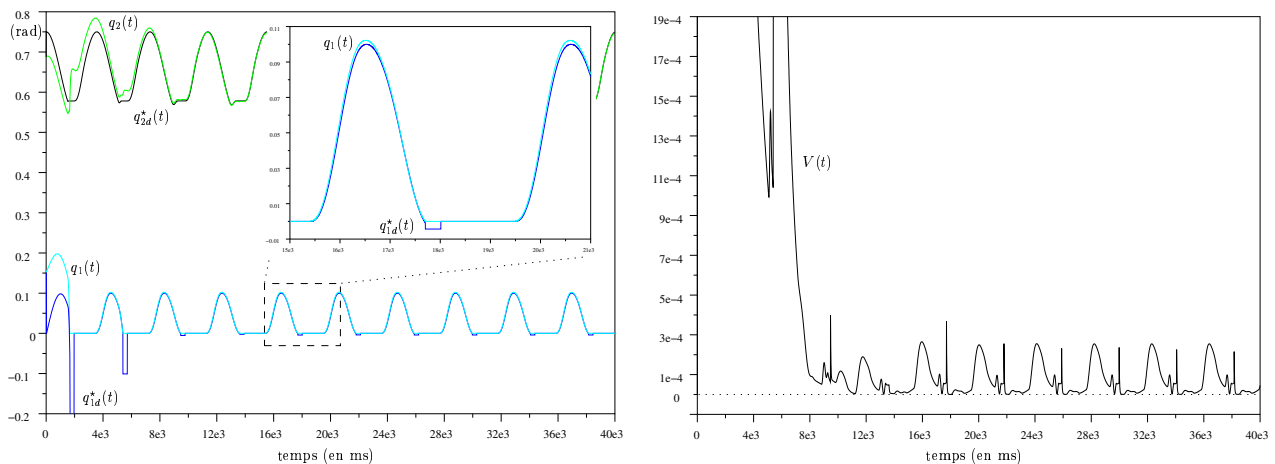


FIG. 6.21 – n° 11: Robustesse - $q_d(t)$ et $q(t)$ FIG. 6.22 – n° 11: Robustesse - fonction $V(t)$

En conclusion, on peut dire que le schéma basé sur la loi de Slotine-Li est plus robuste vis-à-vis des erreurs sur le modèle que le schéma de Paden-Panja.

Erreur dans la position de la contrainte

Nous allons maintenant étudier la robustesse de cette structure de commande lorsque la position de la contrainte n'est pas connue exactement.

La position réelle de la contrainte est le plan $y = 0$. Vue de la commande la position de la contrainte se situe à l'altitude $c \neq 0$. On teste deux cas :

- la position de la contrainte est sous-estimée $c < 0$,
- la position de la contrainte est sur-estimée $c > 0$.

1^{er} cas : la position de la contrainte est sous-estimée $c = -2\text{cm}$

La position réelle de la contrainte est 2cm plus haut que prévu. On simule le schéma de Slotine et Li pour $\alpha = 100$.

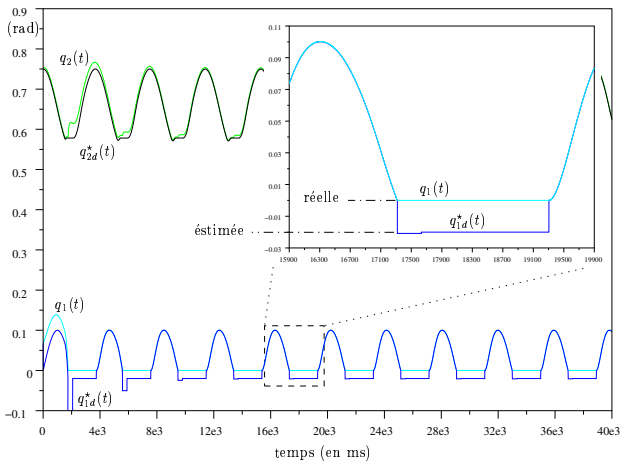


FIG. 6.23 – n° 12: Position de la contrainte sous-estimée

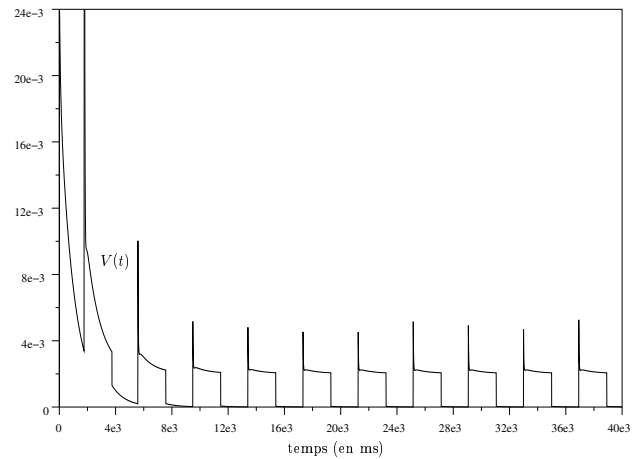


FIG. 6.24 – n° 12: Erreur sur $V(t)$

Dans ce cas la trajectoire de référence ne converge plus vers une approche tangentielle mais vers une approche où l'on impose tout le temps un impact dont la force est proportionnelle à l'erreur d'estimation de la position de la contrainte (voir la figure 6.23). Dans cette situation on perd donc la convergence asymptotique, et la fonction de Lyapunov (figure 6.24) présente des sauts positifs pour tous les cycles.

2^{ème} cas : la position de la contrainte est sur-estimée $c = 2\text{cm}$

La position réelle de la contrainte est 2cm plus bas que prévu. On simule le schéma de commande de Slotine et Li pour $\alpha = 100$.

La figure 6.25 présente les trajectoires du système pour $c = 2\text{cm}$. On constate que pour les deux premiers cycles le terme $\alpha V(\tau_0^k)$ est supérieur à c : la méconnaissance de la position de la contrainte n'a donc pas d'influence sur ces deux cycles. Par contre pour le troisième cycle

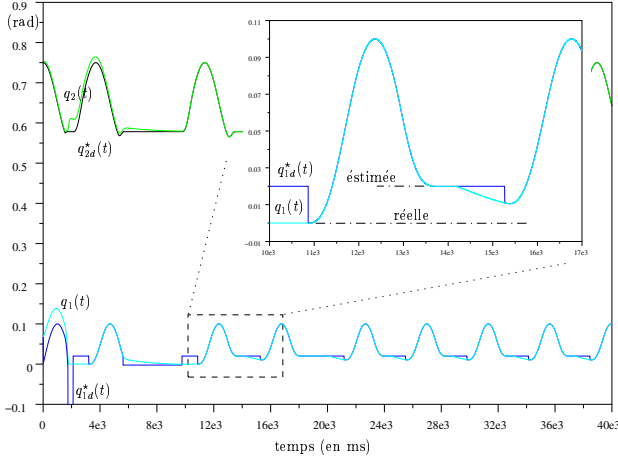


FIG. 6.25 – n° 13: Position de la contrainte sur-estimée - Non Stabilisation

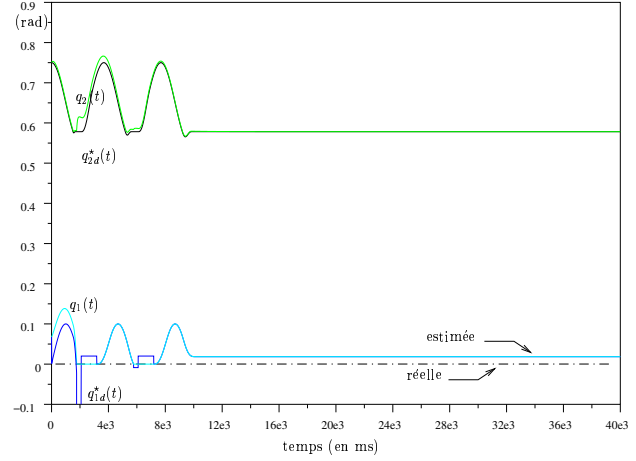


FIG. 6.26 – n° 13: Non détection de l'impact

on a $\alpha V(\tau_0^k) < c$, et le système ne rentre plus en contact avec $\partial\Phi$. Pire encore le système évolue comme s'il y avait eu contact, il évolue dans les phases I_2 , Ω_5 , Ω_6 , I_3 etc. Ceci est dû au fait que la détection de t_0 (l'instant du premier impact) par la loi de commande se faisait uniquement sur la position du système et de sa vitesse.

Pour régler ce problème, il faut vraiment détecter un impact pour passer la transition t_0 du graphe d'évolution de la figure 4.2. En pratique ceci nécessite, par exemple, l'ajout d'un capteur de force. Ceci est fait sur la simulation de la figure 6.26. Par contre, dans ce cas aucun impact n'est détecté et le système reste bloqué dans la phase I_2 .

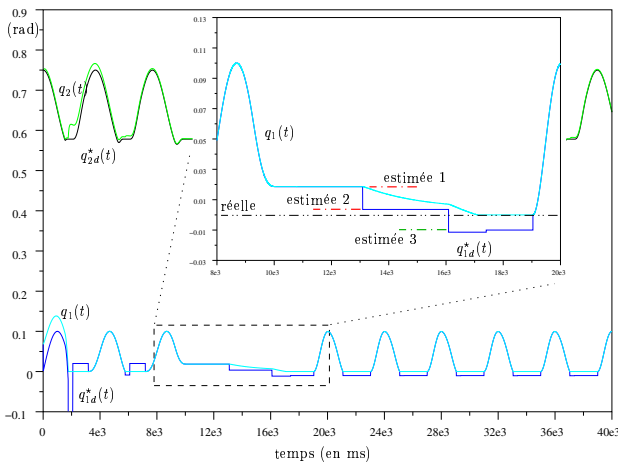


FIG. 6.27 – n° 13: Estimation en ligne de la position de la contrainte

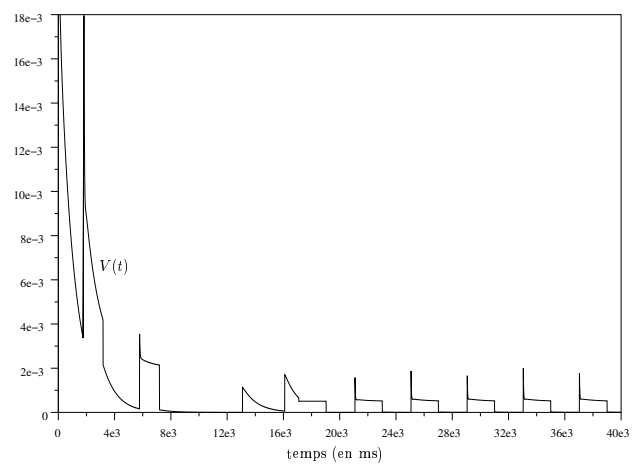


FIG. 6.28 – n° 13: Erreur sur $V(t)$

Le risque de blocage dans une phase I_k en cas de mauvaise estimation de la position de la contrainte (vu sur la figure 6.26) peut être résolu en adaptant en ligne la valeur estimée de la contrainte. En effet, changer la valeur de l'estimation de la position de la contrainte revient en quelque sorte au même que de modifier la valeur de $\alpha V(\tau_0^k)$, ou même encore de simplement modifier α . Comme la valeur de α n'intervient pas dans les conditions de stabilité, on peut la modifier en cours d'exécution. Sur l'exemple de la figure 6.27, on décrémente la valeur de l'estimation de la position de la contrainte de 1,5cm toutes les 3s tant qu'il n'y a pas de contact détecté. Si le pas de décrémentation est trop grand, on risque de se retrouver dans un cas où la position de la contrainte est sous-estimée. Dans cet exemple, l'estimation finale de la position de la contrainte est de $2\text{cm} - 2 \times 1.5\text{cm} = -1\text{cm}$. Les cycles $k_{cyc} = \{2,3,4,\dots,n\}$ se déroulent donc avec une contrainte sous-estimée. On n'obtient donc pas de stabilité asymptotique.

essai	Loi	α	γ_1	γ_2	Pe	
n° 1	Slotine	10	5	0.5	16s	
n° 2	Paden	0	2	5	3s	
n° 3	Paden	100	2	5	3s	
n° 4	Paden	75	2	5	3s	
n° 5	Paden	50	2	5	3s	
n° 6	Paden	75	1	2	3s	
n° 7	Slotine	0	10	0.5	4s	
n° 8	Slotine	100	10	0.5	4s	
n° 9	Slotine	5	10	0.5	3s	
n° 10	Paden	100	2	5	4s	Robustesse
n° 11	Slotine	100	10	0.5	3s	erreurs sur les masses +30%
n° 12	Slotine	100	10	0.5	3s	erreurs sur les masses +30%
n° 13	Slotine	100	10	0.5	3s	position contrainte estimée +2cm
						position contrainte estimée -2cm

TAB. 6.2 – Valeurs des paramètres de chaque simulation

6.3 Conclusion

Ce chapitre montre quelques exemples de simulation des deux schémas de commande, basés sur les lois de [Paden & Panja, 1988] et de [Slotine & Li, 1988], présentés dans les chapitres 5.1 et 5.2. Ces essais montrent la faisabilité de telles structures de commande.

D'un point de vue simulation, la principale difficulté reste la simulation des impacts pour des systèmes mécaniques. Sur ce cas simple cela se résume à la résolution d'un LCP.

D'un point de vue commande, la difficulté d'implémentation (hormis le calcul du modèle lagrangien en ligne) se situe au niveau de la génération des trajectoires de transitions entre chaque phase qui assurent que q_d^* soit bien deux fois différentiable lorsque c'est nécessaire. Des trajectoires générées trop simplement provoquent de fortes déformations de la trajectoire limite $X^{i,c}(t)$ par rapport à la trajectoire désirée.

En ce qui concerne la robustesse, on peut dire que ce schéma de commande est robuste si on considère les erreurs au niveau du modèle ainsi que des erreurs d'estimation de la position de la contrainte négatives ($c \leq 0$). Dans le cas des contraintes sur-estimées, obtenir une commande robuste nécessite de rajouter un module de surveillance au niveau du superviseur qui permette de détecter des cas où la contrainte est sur-estimée. Dans tous les cas, une erreur, dans le modèle géométrique ou dynamique, entraîne la présence permanente d'impact, ce qui prive cette commande de stabilité asymptotique.

Chapitre 7

Impacts Multiples

Ce chapitre étend le schéma de commande précédant au cas des chocs multiples. L'objectif est de stabiliser le système non plus sur une surface, mais sur l'intersection de deux surfaces. C'est-à-dire qu'on cherche à stabiliser le système sur une singularité de $\partial\Phi$ (voir définition en page 9).

7.1 Introduction

Définition 5 (Impact multiple) : *Un impact multiple est un impact sur une singularité telle que dans la définition 1 page 9. Si la singularité a une co-dimension α , l'impact multiple est appelé un α -impact. De même la singularité est notée Σ^α .*

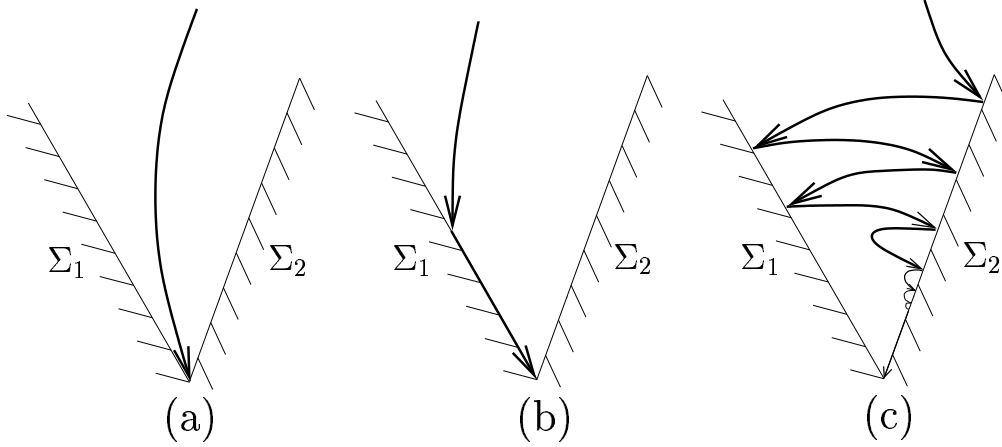
En ce qui concerne la stabilisation sur une singularité de $\partial\Phi$, le problème est que le système peut atteindre la singularité de façons différentes : le système peut atteindre la singularité directement, ou bien il peut percuter une ou plusieurs surfaces Σ_i avant d'atteindre la singularité (avec un nombre fini ou infini d'impacts), voir la figure 7.1.

Par la suite on note θ_{kin}^{ij} , l'angle cinétique entre deux surfaces Σ_i et Σ_j (i.e. un angle dans la métrique cinétique définie par $x^T M(q)y$ pour les vecteurs x et y). Par la suite nous allons nous restreindre au cas $m = 2$ (deux contraintes) et $\theta_{kin}^{12} \leq \frac{\pi}{2}$. Les raisons de ce choix sont les suivantes :

- Supposons que $e_n = 0$ dans l'équation d'impact (1.11). D'après [Paoli, 2002], les conditions $\theta_{kin}^{12} \leq \frac{\pi}{2}$ et $e_n = 0$ impliquent que les trajectoires (i.e. les solutions de la boucle fermée) sont continues par rapport aux conditions initiales.
- En prenant $e_n \in [0,1]$ et en supposant que le système se déplace en restant en contact avec Σ_1 avant de toucher $\partial\Phi$ en q . Alors $\dot{q}(t_k^-) \in N_\Phi(q)$ et d'après (1.12) $\dot{q}(t_k^+) = -e_n \dot{q}(t_k^-)$. Cela veut dire qu'après le choc, la vitesse est encore tangente à Σ_1 , et l'état après le choc en t_k^+ vérifie toujours la contrainte $q_1^1 = 0$.⁽¹⁾

Le but est donc de stabiliser le système sur une singularité $\Sigma^2 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ durant une phase de transition. Plusieurs cas vont être examinés par la suite, et le contrôleur utilisé sera celui développé en (5.1).

1. La notation $q_1^i = 0$ renvoie à la coordonnée correspondant à la $i^{\text{ème}}$ contrainte unilatérale, voir le changement de coordonnées de [McClamroch & Wang, 1988] à la page 35.


 FIG. 7.1 – *Impact Multiple (2-impact)*

7.2 Stabilisation sur un 2-impact

Dans ce cas, les deux surfaces sont atteintes simultanément. Cela veut dire qu'à chaque instant d'impact t_k , on a $q_1^1(t_k) = q_1^2(t_k) = 0$, et l'analyse de stabilité faite dans le chapitre 5.1.3 pour un 1-impact peut être adaptée pour un tel 2-impact. Si $e_n = 0$, la continuité des solutions par rapport aux conditions initiales nous permet de conclure que cette stratégie possède certaines propriétés de robustesse. Effectivement si le système ne rentre pas en contact exactement sur la singularité Σ^2 , mais sur un voisinage, alors la stabilisation a quand même lieu avec ce contrôleur comme décrit sur la figure 7.1(b).

Par contre si $e_n > 0$ alors cette stratégie ne marche plus en pratique, à cause de son manque de robustesse (puisque les trajectoires rebondissant dans un voisinage de Σ^2 et celle rebondissant sur Σ^2 peuvent être très différentes).

7.3 Impact sur une surface précédant un 2-impact

Dans ce cas la phase de transition est découpée en deux étapes : une première sous-phase durant laquelle le système est stabilisé sur Σ_1 (sans qu'il y ait d'impact sur Σ_2); et une seconde sous-phase durant laquelle le système est stabilisé sur Σ^2 . La propriété exposée dans le deuxième point de l'introduction de ce chapitre, assure que le système reste sur Σ_1 au cours de cette seconde sous-phase.

La preuve de stabilité pour la première phase est similaire au cas 1-impact si on prend $q_1 = [q_1^1]$ et $q_2 = \begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_2 \end{bmatrix}$. Pendant la seconde phase, le système est en mouvement complètement

contraint, et la dynamique de la boucle fermée est :

$$M(q)\ddot{q} = -C(q,\dot{q})\dot{q} - \gamma_1\bar{q} - \gamma_2\dot{q} + (1 + K_{f1})(\lambda_{q_1} - \lambda_{d_1})\nabla_q q_1^1 \quad (7.1)$$

Le système est stabilisé sur Σ^2 en utilisant le signal $q_{1d}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ q_{1d}^{2*} \end{bmatrix}$, où q_{1d}^{2*} a la même forme que q_{1d}^{1*} lors de la phase précédente et décroît vers $-\alpha_2 V(\tau_0^{k_{cyc}})$.

Comme pour la preuve précédente nous devons montrer que l'inégalité suivante :

$$V(x(t_{k+1}^-), t_{k+1}^-) - V(x(t_k^+), t_k^+) \leq 0 \quad (7.2)$$

est vérifiée. On a :

$$\begin{aligned} & V(x(t_{k+1}^-), t_{k+1}^-) - V(x(t_k^+), t_k^+) \\ &= \int_{(t_k, t_{k+1})} \dot{V}(t) dt \\ &= \int_{(t_k, t_{k+1})} \dot{q}^T M \ddot{q} + \dot{q}^T \frac{\dot{M}}{2} \dot{q} + \gamma_1 \tilde{q}^T \tilde{q} dt \\ &= \int_{(t_k, t_{k+1})} \left(\dot{q}^T [-C\dot{q} - \gamma_1\bar{q} - \gamma_2\dot{q} + (1 + k_{f1})(\lambda_{q_1} - \lambda_{d_1})\nabla_q q_1^1] + \dot{q}^T \frac{\dot{M}}{2} \dot{q} + \gamma_1 \tilde{q}^T \tilde{q} \right) dt \\ &= \int_{(t_k, t_{k+1})} -\gamma_2 \dot{q}^T \dot{q} dt + \gamma_1 \int_{(t_k, t_{k+1})} \dot{q}_1^T q_{1d}^* dt + \int_{(t_k, t_{k+1})} \dot{q}^T (1 + k_{f1})(\lambda_{q_1} - \lambda_{d_1})\nabla_q q_1^1 dt \\ &= \int_{(t_k, t_{k+1})} -\gamma_2 \dot{q}^T \dot{q} dt \leq 0 \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité est déduite de la précédente en utilisant le fait que la matrice $2C(q,\dot{q}) - \dot{M}(q,\dot{q})$ est antisymétrique, et que $\dot{q}^T \tilde{q} - \dot{q}^T \bar{q} = \dot{q}^T q_{1d}^*$.

La dernière égalité est déduite de la précédente car $\dot{q}^T (1 + k_{f1})(\lambda_{q_1} - \lambda_{d_1})\nabla_q q_1^1 = 0$ et $[q_1^T q_{1d}^*]_{t_k}^{t_{k+1}} = 0$ puisque $q_1(t_k) = 0$ au cours du 2-impact. Une preuve similaire au cas 1-impact nous permet de conclure sur la stabilité asymptotique de la poursuite de trajectoires comportant ce 2-impact.

Néanmoins nous avons supposé qu'il n'y avait pas d'impact sur la seconde surface lors de la première sous-phase. Ceci n'est pas toujours réalisable en pratique, et peut présenter des problèmes de robustesse pour le cas de la stabilisation au voisinage de la singularité.

7.4 Le cas général

Dans le cas général, le système peut percuter indifféremment les deux surfaces. Il se produit plusieurs 1-impacts sur les deux surfaces avant qu'il y ait le 2-impact. Dans cette configuration,

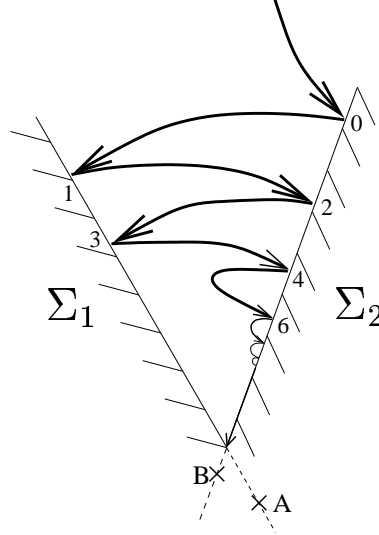


FIG. 7.2 – Cas général

nous n'avons pas $q_1(t_k) = 0$ pour chaque impact (ceci n'est vrai que pour le 2-impact). La stabilité faible peut être obtenue en étudiant les variations de $V(q(t), \dot{q}(t), t)$ entre deux impacts sur la même surface (Σ_1 ou Σ_2).

Soit la notation suivante: $\{t_{2k}\}_{k \geq 0}$ représente les instants d'impact sur Σ_2 , et $\{t_{2k+1}\}_{k \geq 0}$ ceux sur Σ_1 . Choisissons aussi $q_{1d}^* = \begin{bmatrix} q_{1d}^{1*} \\ q_{1d}^{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 V(x(\tau_0^{k_{cyc}}), \tau_0^{k_{cyc}}) \\ -\alpha_2 V(x(\tau_0^{k_{cyc}}), \tau_0^{k_{cyc}}) \end{bmatrix}$. Calculons la variation de $V(q(t), \dot{q}(t), t)$ entre deux impacts sur Σ_2 :

$$\begin{aligned} & V(t_{2(k+1)}^-) - V(t_{2k}^+) \\ &= \int_{(t_{2k}, t_{2k+1})} \dot{V}(t) dt + \sigma_V(t_{2k+1}) + \int_{(t_{2k+1}, t_{2(k+1)})} \dot{V}(t) dt \\ &= \sigma_V(t_{2k+1}) - \gamma_2 \int_{(t_{2k}, t_{2k+1})} \dot{q}^T \dot{q} dt - \gamma_2 \int_{(t_{2k+1}, t_{2(k+1)})} \dot{q}^T \dot{q} dt + \gamma_1 q_{1d}^{*T} [q_1]_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} + \gamma_1 q_{1d}^{*T} [q_1]_{t_{2k+1}}^{t_{2(k+1)}} \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$= \Delta + \gamma_1 q_{1d}^{*T} (q_1(t_{2(k+1)}) - q_1(t_{2k})) \quad (7.4)$$

$$= \Delta + \gamma_1 q_{1d}^{1*T} (q_1^1(t_{2(k+1)}) - q_1^1(t_{2k})) \quad (7.5)$$

où $\Delta \geq 0$ est la somme de tous les termes négatifs de l'équation (7.3). L'égalité (7.4) est déduite de (7.3) puisque $q_1^2(t_{2k}) = 0$ pour tout k . En prenant $\alpha_1 = 0$, alors $q_{1d}^{1*} = 0$ et :

$$V(t_{2(k+1)}^-) - V(t_{2k}^+) < 0$$

La stratégie est donc de prendre $\alpha_1 = 0$ (la consigne de la commande correspond au point A sur la figure 7.2) au début de la phase de transition. Le système se stabilise sur Σ_2 , puis il suffit de commuter la commande vers $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 > 0$ (consigne B sur la figure 7.2) lorsque le système est sur Σ_2 (ou bien revenir au cas de la section 7.3).

7.5 Conclusion

Ce chapitre donne des perspectives sur les possibilités d'extension du schéma de commande présenté dans cette thèse au cas des 2-impacts. Seuls les impacts multiples sur des singularités dont l'angle cinétique est inférieur à $\frac{\pi}{2}$ ont été considérés car ce sont les seuls cas pour lesquels on possède des résultats sur la dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales.

Dans la partie suivante nous allons voir un autre type de système mécanique comportant des impacts multiples.

Deuxième partie

Etude d'un système mécanique sous-actionné soumis à des chocs multiples

Cette deuxième partie traite le cas d'un système mécanique particulier soumis à un 2-impact. Contrairement au travail fait en 1^{ère} partie, nous n'aborderons pas ici l'aspect commande, nous allons seulement exhiber les difficultés liées à la commande de tels systèmes.

Encore une fois, nous mettrons en évidence le rôle important des couplages de la matrice d'inertie.

Sommaire

- ★ **Introduction et présentation de Rabbit**
Problématique de la marche en double support
 - ★ **le rocking bloc simple**
Conditions pour ne pas avoir de basculement après un 2-impact
 - ★ **Le rocking bloc de forme et d'inertie variable**
Conditions pour ne pas avoir de basculement après un 2-impact
 - ★ **Application au robot Rabbit**
Résultats numériques
 - ★ **Conclusion**
-

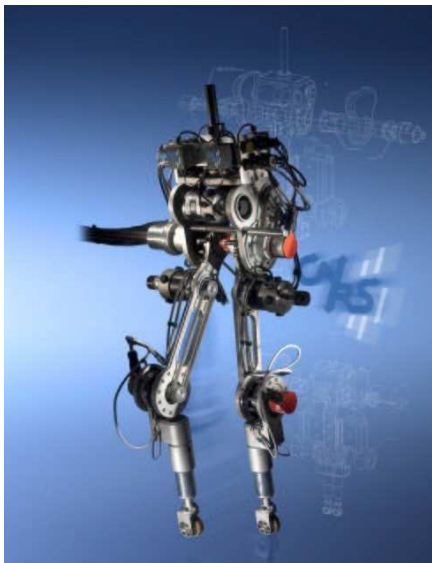
Chapitre 8

Problématique de la marche en double support

Ce chapitre expose le problème de la marche en double support, pour un robot bipède plan. Après une courte introduction présentant le robot Rabbit, nous allons présenter une approche nouvelle pour considérer le bipède au moment d'un 2-impact.

8.1 Le bipède Rabbit

Le robot Rabbit (voir figure 8.1) est un robot bipède constitué de 5 corps et de 4 actionneurs. Une description plus détaillée du robot est disponible dans [Westervelt *et al.*, 2004] et [Chevallereau *et al.*, 2003]. On note $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ la configuration des articulations motorisées du robot, et $q_e = (q, q_5, x_G, y_G)$ le vecteur d'état du système (voir figure 8.2). Le bipède est soumis à deux contraintes unilatérales $f_1(q_e) \geq 0$ et $f_2(q_e) \geq 0$, correspondant aux deux contacts des pieds avec le sol; on considère qu'en fonctionnement normal, ce sont les deux seuls points du robot susceptibles d'être en contact avec le sol.



Photos: ©Artechnique / Cnrs

FIG. 8.1 – Le bipède Rabbit

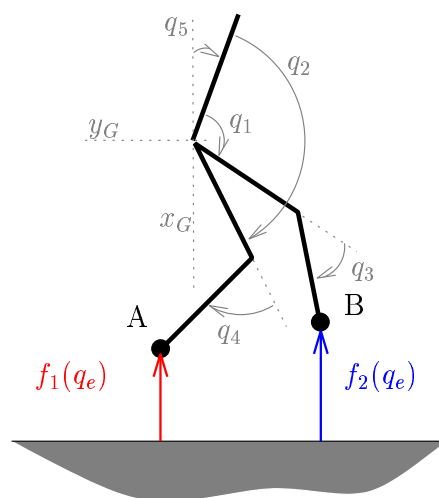


FIG. 8.2 – Les deux contraintes unilatérales

La dynamique du robot peut s'écrire sous la forme Lagrangienne suivante :

$$\begin{aligned} M(q_e)\ddot{q}_e + C(q_e, \dot{q}_e)\dot{q}_e + G(q_e) &= U + \nabla f_1(q_e)\lambda_1 + \nabla f_2(q_e)\lambda_2 \\ f_1(q_e) \geq 0, f_1(q_e)\lambda_1 &= 0, \lambda_1 \geq 0 \\ f_2(q_e) \geq 0, f_2(q_e)\lambda_2 &= 0, \lambda_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

où $M(q_e)$ représente la matrice d'inertie du bipède, $C(q_e, \dot{q}_e)$ la matrice des effets de Coriolis et centripète, $G(q_e)$ les effets de gravité, $U(\cdot)$ les couples moteurs, λ_1 et λ_2 représentent les efforts de réaction du sol sur le bipède.

Soient les définitions suivantes :

Définition 6 (Marche en double support) : *La marche en double support est une allure où les deux pieds sont en contact avec le sol en même temps pendant une durée (T_{DS}) non nulle.*

Définition 7 (Marche en simple support) : *La marche en simple support est une allure où les deux pieds ne sont jamais en contact avec le sol en même temps. La transition d'un appui sur une jambe vers l'autre est instantanée.*

Définition 8 (Course) : *La course est une allure où les deux pieds ne sont pas en contact avec le sol en même temps pendant une durée (T_{vol}) non nulle.*

Problématique

Le problème qui nous intéresse dans cette partie est de savoir sous quelles conditions une marche en double support est possible pour un robot bipède plan tel que celui de la figure 8.2. En effet nous verrons par la suite, qu'au moment de l'impact de la jambe libre sur le sol, il n'est pas forcément évident de maintenir la jambe d'appui encore en contact avec le sol après l'impact.

8.2 La marche en simple support : le pendule inversé

Une première approche est de considérer la dynamique du bipède comme équivalente à celle d'un pendule inversé [Kajita & Tani, 1996]. Dans [Chevallereau *et al.*, 2003] et [Westervelt, 2003] le robot Rabbit est vu comme un pendule inversé au cours des phases de simple support (voir figure 8.3). Cette équivalence bipède/pendule permet d'obtenir de façon analytique l'évolution du bipède au cours de cette phase. En supposant que la phase de double support est instantanée, il est possible de conserver cette identification à un pendule tout en enchaînant différents pas. A chaque instant d'impact t_k une loi de restitution permet de

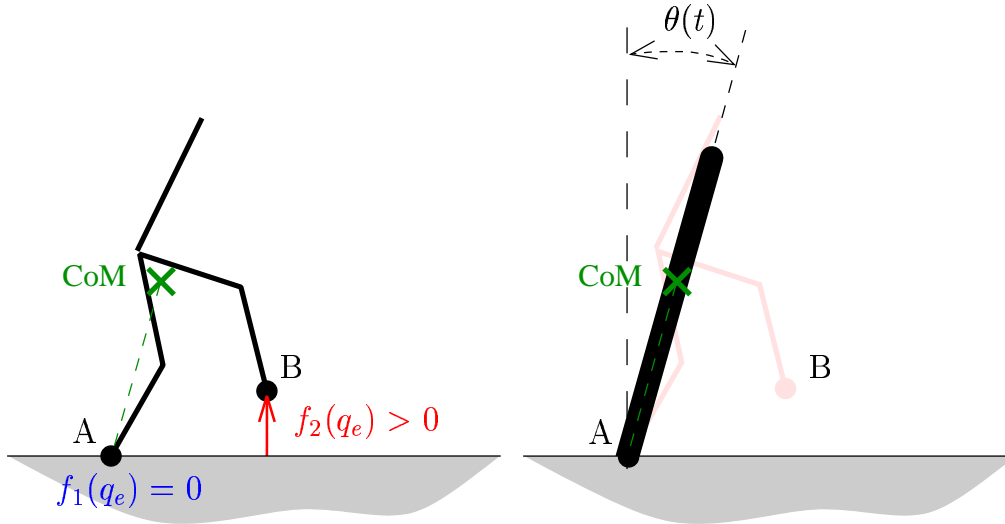


FIG. 8.3 – Identification à un pendule (SS)

réinitialiser la position du pendule (changement de coordonnées, et réinitialisation des vitesses post-impact). Cette technique a été utilisée avec succès pour les premiers essais de marche en simple support sur cette plateforme robotique. Par contre dans le cas de la marche en double support, on ne peut plus utiliser ce modèle, car il ne modélise pas le contact simultané des deux pieds. Nous allons donc proposer une nouvelle approche.

8.3 Une approche possible pour la marche en double support : le “rocking block”

D’après [Azevedo, 2002], la durée d’un cycle normal du marche contient environ 20% de phases de double support (voir figure 8.4). La phase de double support n’est donc pas négligeable.

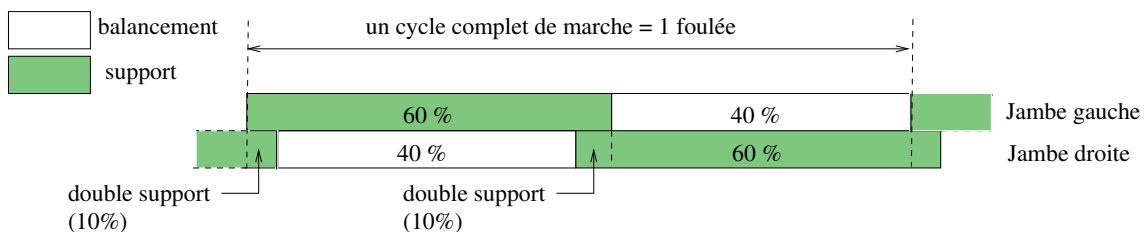


FIG. 8.4 – Cycle de marche d’un bipède [Azevedo, 2002]

Pour pouvoir tenir compte de l’évolution du mouvement du bipède pendant la phase de double support il ne faut plus identifier le bipède à un pendule inversé mais plutôt à un “bloc”

de forme et de répartition des masses variables (fonction de la configuration $q(t)$ du bipède). La répartition des masses du bloc est caractérisée par la position du centre de masse du bipède et par son inertie $I(q)$. La forme du bloc est fixée par la position des pieds du bipède (points A et B de la figure 8.5).

Dans le cadre du contrôle de ce bipède pour une marche en double support, l'idée serait de suivre une approche similaire à celle de [Chevallereau *et al.*, 2003] et [Westervelt, 2003] lorsque que le bipède est en phase de balancement sur un pied. Et d'utiliser l'approche "Rocking Block" pour positionner au mieux le robot au moment du double impact.

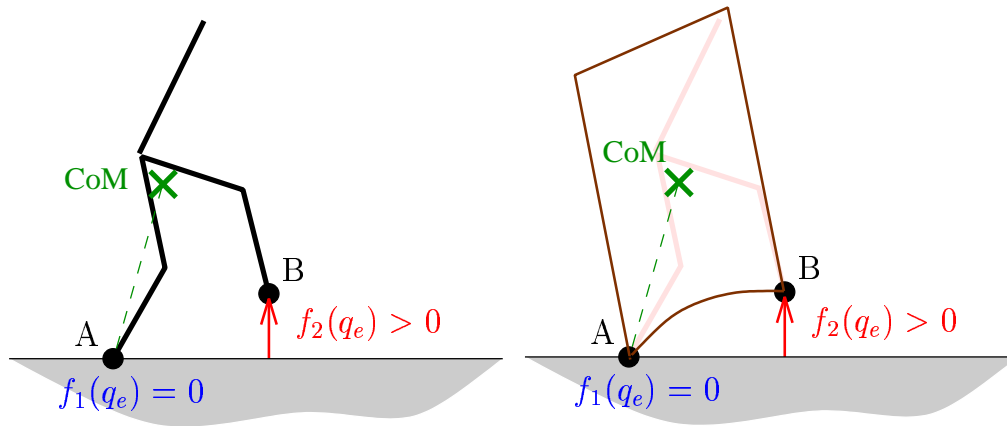


FIG. 8.5 – Identification à un bloc (DS)

Comme les pieds du bipède ne peuvent pas pénétrer le sol (en A et en B), le système est contraint d'évoluer dans un sous espace Φ de $\mathbb{R}^{dim(q_e)}$ défini par l'intersection de deux demi-espaces $\Phi = \{q_e | f_1(q_e) \geq 0\} \cap \{q_e | f_2(q_e) \geq 0\}$ (voir figure 8.6). Le problème de la marche correspond donc à l'évolution du système sur la trajectoire M de la figure 8.6, alors que la course correspond à la trajectoire C . Pour ce qui est de la marche, on obtient une marche avec double support si le passage par $DS = \{f_1(q_e) = 0 \cap f_2(q_e) = 0\}$ n'est pas instantané (on note $\Sigma_i = \{q_e | f_i(q_e) = 0\}$).

Le problème qui nous intéresse ici, est donc de savoir comment évolue le système après un double impact en DS (voir la figure 8.7) :

- Est ce que le système reste en DS ?
- Si non, quelle est son évolution?

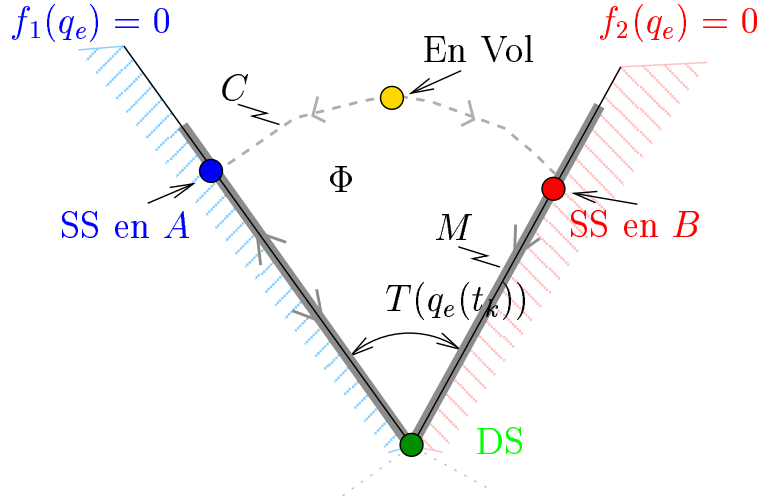


FIG. 8.6 – Contraintes dans l'espace des coordonnées généralisées

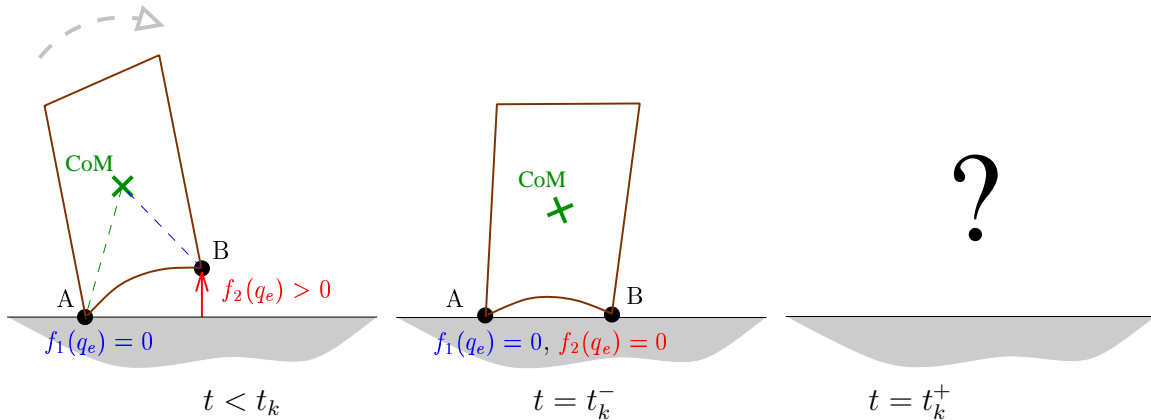


FIG. 8.7 – Quelle est l'évolution du mouvement après l'impact

8.4 Etude d'un double impact

Pour pouvoir intégrer la dynamique donnée dans l'équation (8.1), il faut une loi de restitution qui donne la vitesse post impact du système lorsque ce dernier arrive sur une contrainte, et ainsi garder le système à l'intérieur de Φ . On utilise la même loi que dans la partie I, soit la loi de restitution suivante [Moreau, 1988] :

$$\underbrace{\dot{q}_e(t_k^+)}_{\text{Elast}} = \underbrace{-e_n \dot{q}_e(t_k^-) + (1 + e_n) \arg \min_{Z \in T(q_e(t_k^-))} \frac{1}{2} (Z - \dot{q}_e(t_k^-))^T M(q) (Z - \dot{q}_e(t_k^-))}_{\text{proj}_M} \quad (8.2)$$

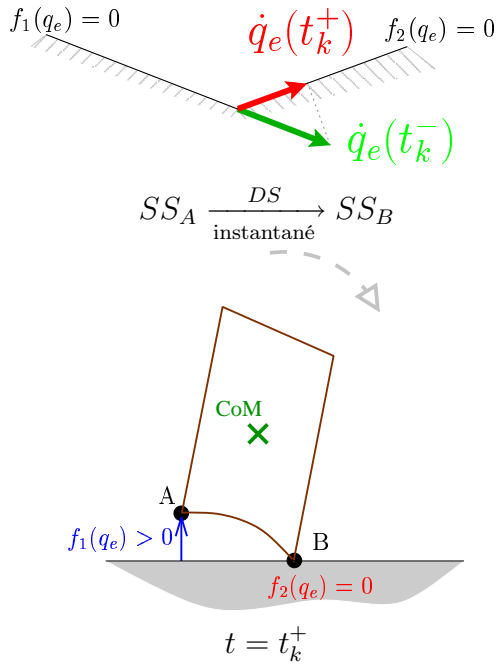


FIG. 8.8 – Angle obtus, choc plastique

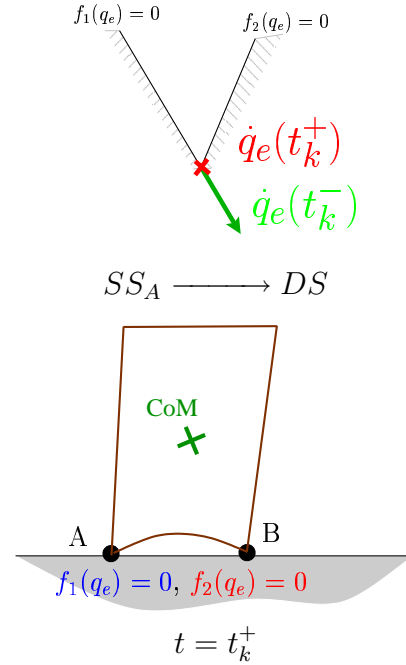


FIG. 8.9 – Angle aigu, choc plastique

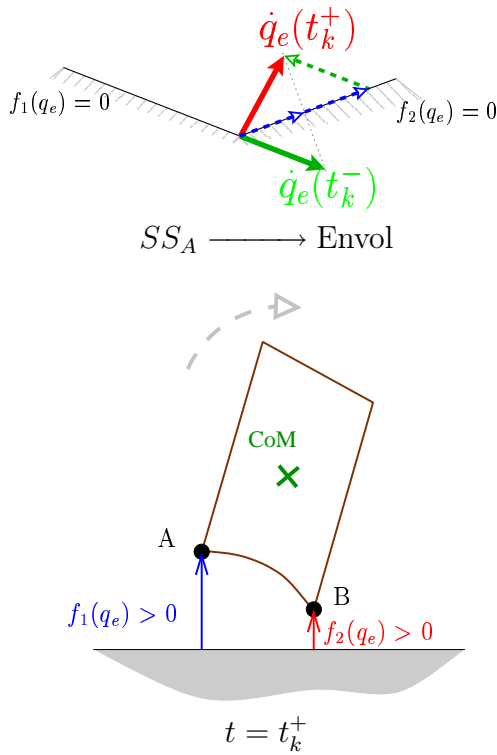


FIG. 8.10 – Angle obtus, choc élastique

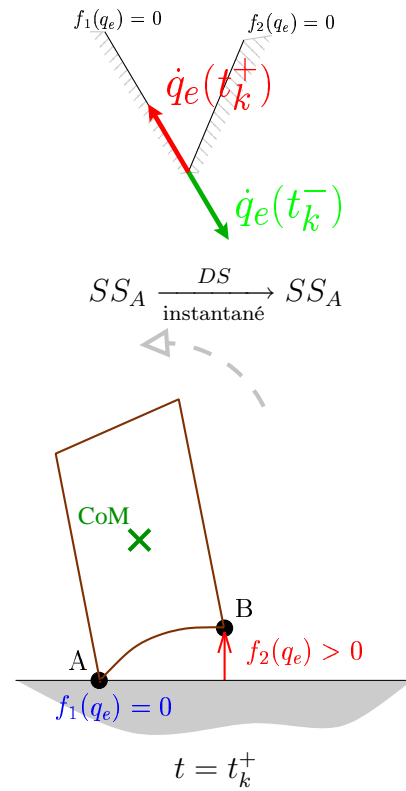


FIG. 8.11 – Angle aigu, choc élastique

Lors de l’application de cette loi de restitution, quatre cas sont à distinguer : Si le choc est plastique ou élastique, et si l’angle cinétique θ_{kin}^{12} entre les deux contraintes est obtus ou aigu.

- Si $\theta_{kin}^{12} \geq \frac{\pi}{2}$ et $e_n = 0$, alors le terme *Elast* de (8.2) est nul et le terme $proj_M \in \Sigma_2$ on a donc que $\dot{q}_e(t_k^+) \in \Sigma_2$ (voir la figure 8.8). Le bloc passe du simple support en A (SS_A) vers un simple support en B (SS_B) en passant par une phase de double support (DS) instantanée ,
- si $\theta_{kin}^{12} \leq \frac{\pi}{2}$ et $e_n = 0$, alors le bloc passe directement en phase de double support (voir la figure 8.9),
- si $\theta_{kin}^{12} \geq \frac{\pi}{2}$ et $e_n > 0$, alors le bloc s’envole, aucun des deux point A et B ne reste en contact avec le sol après le double impact (voir la figure 8.10),
- si $\theta_{kin}^{12} \leq \frac{\pi}{2}$ et $e_n > 0$, alors le bloc rebondit en marche arrière autour du point A (voir la figure 8.11).

D’après les résultats précédents, un contact persistant après l’impact n’est possible qu’à deux conditions :

- le choc est plastique ($e_n = 0$),
- l’angle cinétique est inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

8.5 Le “rocking block” simple

Dans [Brogliato, 1999, section 6.1.1] on trouve les conditions sur la géométrie du bloc nécessaires pour avoir un angle cinétique $\theta_{kin}^{12} \leq \frac{\pi}{2}$. Pour un bloc rectangulaire homogène (c’est-à-dire de centre de masse au milieu du rectangle), de largeur L , de hauteur l , de masse m et d’inertie I alors on a :

$$\theta_{kin}^{12} \leq \frac{\pi}{2} \iff 4I \leq mL^2 \quad (8.3)$$

Le bloc est homogène d’où $I = \frac{m}{12}(l^2 + L^2)$, et la condition (8.3) devient :

$$\theta_{kin}^{12} \leq \frac{\pi}{2} \iff l^2 \leq 4L^2 \quad (8.4)$$

Ce résultat était prévisible : pour que le bloc s’arrête de basculer il faut qu’il soit beaucoup plus large que haut.

Pour le cas particulier d’un “rocking bloc” de forme carrée, on trouve dans [Frémond, 2002, section 8.18.5], les résultats suivant :

- Si $I - mR^2 \cos^2 \alpha \geq 0$
 - le bloc pivote en B pour $mI - 4k^2 R^2 \cos^2 \alpha \geq 0$
 - le bloc s’envol pour $mI - 4k^2 R^2 \cos^2 \alpha \leq 0$

- Si $I - mR^2 \cos^2 \alpha \leq 0$
 - le bloc s'arrête pour $I - 4kR^2 \cos \alpha + mR^2 \cos \alpha \geq 0$
 - le bloc pivote en A pour $I - 4kR^2 \cos \alpha + mR^2 \cos \alpha \leq 0$

où I et m correspondent à l'inertie et à la masse du bloc, R et α sont définis sur la figure 8.12, et k correspond au coefficient de la loi de Frémond qui détermine les caractéristiques du contact (plastique ou élastique).

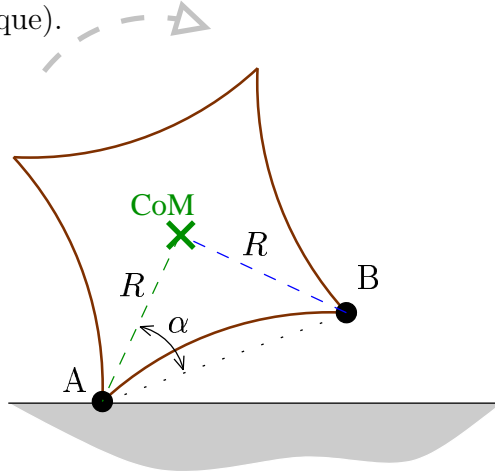


FIG. 8.12 – Exemple de [Frémond, 2002]

On compare maintenant les résultats de cette loi avec ceux de la loi de Moreau. Avec les nouvelles notations de la figure 8.12, la largeur du bloc vaut :

$$L = 2R \cos \alpha \quad (8.5)$$

La condition (8.3) se transforme en

$$\theta_{kin}^{12} \leq \frac{\pi}{2} \iff 4I \leq m4R^2 \cos^2 \alpha \quad (8.6)$$

ou bien en

$$\theta_{kin}^{12} \leq \frac{\pi}{2} \iff I - m4R^2 \cos^2 \alpha \leq 0 \quad (8.7)$$

Avec la loi de [Frémond, 2002] on retrouve la même classification des mouvements post-impact possibles. A savoir un premier découpage qui est fonction uniquement de la configuration propre du bloc (dimensions, inertie, masse...). Et un deuxième découpage qui est fonction de la nature du contact entre le bloc et le sol.

8.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu quelles étaient les conditions nécessaires pour avoir un double support persistant après l'impact. Il faut d'une part que l'impact soit de type plastique

($e_n = 0$). Et d'autre part que l'angle cinétique θ_{kin}^{12} soit inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. Nous avons vu que cette deuxième condition est équivalente à une condition sur les paramètres physiques du bloc (m, L, l, I). Dans le cas de l'identification bloc/bipède, l'idée est donc de dire que ces paramètres sont fonction de la configuration du bipède au moment de l'impact ($m, L(q), l(q), I(q)$). De cette manière il est possible de trouver une configuration $q(t_k)$ du bipède qui implique $\theta_{kin}^{12} \leq \frac{\pi}{2}$.

Dans le chapitre suivant nous allons traiter le cas d'un bloc de forme variable pour permettre d'adapter au mieux la position du centre de masse et les points de contact avec ceux du bipède identifié.

Chapitre 9

Identification du bipède par un bloc déformable

Dans ce chapitre, nous allons déterminer quelles sont les conditions sur les caractéristiques géométriques du bloc déformable au moment du double impact pour obtenir une phase de double contact de durée non nulle (proposition 11). Ensuite nous appliquerons ce résultat au cas du bipède “Rabbit”, pour déterminer les configurations pré-impact permettant d’obtenir un double support.

9.1 Cas du bloc de forme et d’inertie variable

Dans ce chapitre le bloc n’est plus rectangulaire, mais il est de forme quelconque. Le bloc est caractérisé par sa masse, par la position de son centre de masse (par rapport au deux point de contact avec le sol) et par son inertie.

9.1.1 Caractérisation du bloc de forme quelconque.

Soit le bloc suivant (voir figure 9.1), où les paramètres l_1 , l_2 , α_1 et α_2 définissent la forme du bloc. Dans ce chapitre l_1 , l_2 , α_1 et α_2 sont des constantes qui définissent la position du centre de masse du bloc par rapport aux deux points d’appui A et B du bloc avec le sol. Par la suite ces paramètres seront fonction de la configuration du bipède au moment du double impact ($l_1(q)$, $l_2(q)$, $\alpha_1(q)$ et $\alpha_2(q)$).

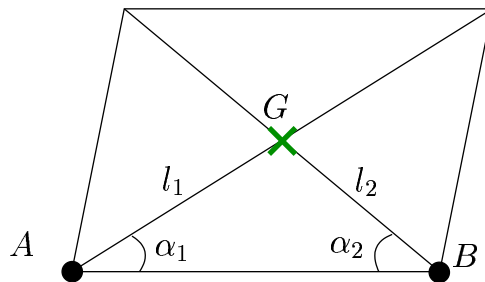


FIG. 9.1 – Paramétrisation du bloc

Soit $X = (x_G, y_G, \theta)^T$ le vecteur d'état du bloc, où (x_G, y_G) représentent les coordonnées du centre de masse du bloc, et θ l'orientation du bloc (voir figure 9.2).

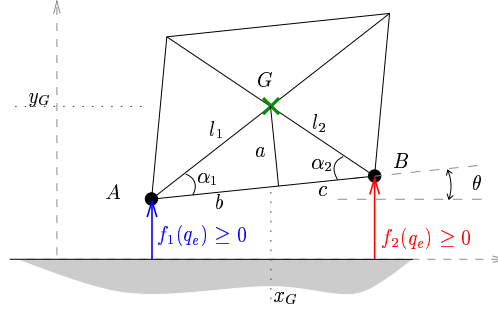


FIG. 9.2 – Deux contraintes sur le bloc

9.1.2 Conditions de non basculement.

Dans la proposition suivante nous allons voir quelles sont les conditions en termes de position de G , de A et de B qui font que le bloc ne bascule pas après un double impact.

Proposition 11 : Soit le bloc de la figure 9.1 d'inertie I_{bloc} par rapport à son centre de masse $G = (x_G, y_G)$, m_{bloc} la masse du bloc, $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ les positions des points de contact possibles avec le sol.

Alors une phase de double appui en A et B de durée non nulle existe si et seulement si :

$$(x_G - x_A)(x_B - x_G) \geq \frac{I_{bloc}}{m_{bloc}} \quad (9.1)$$

Preuve.

Le bloc est soumis à deux contraintes unilatérales

$$\begin{aligned} 0 &\leq y_A \perp \lambda_A \geq 0 \\ 0 &\leq y_B \perp \lambda_B \geq 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

où y_A (respectivement y_B) représente la position du point A (respectivement B) par rapport au sol, et λ_A (respectivement λ_B) est le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte.

Les expressions de y_A et y_B peuvent s'exprimer en fonction des variables d'états du système :

$$\begin{aligned} y_A &= y_G - a \cos \theta - b \sin \theta \\ y_B &= y_G - a \cos \theta + c \sin \theta \end{aligned} \quad (9.3)$$

Les longueurs a , b et c sont représentées sur la figure 9.2, avec

$$\begin{cases} b = l_1 \cos \alpha_1 \\ c = l_2 \cos \alpha_2 \\ a = l_1 \sin \alpha_1 \end{cases} . \quad (9.4)$$

Les équations (9.3) se réécrivent :

$$\begin{aligned} y_A &= y_G - l_1 \sin \alpha_1 \cos \theta - l_1 \cos \alpha_1 \sin \theta \\ y_B &= y_G - l_1 \sin \alpha_1 \cos \theta + l_2 \cos \alpha_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (9.5)$$

Les vecteurs normaux aux deux contraintes \vec{n}_A et \vec{n}_B sont donnés par :

$$\begin{aligned} \vec{n}_A = \frac{\partial y_A}{\partial X} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ l_1 \sin \alpha_1 \sin \theta - l_1 \cos \alpha_1 \cos \theta \end{pmatrix} \\ \vec{n}_B = \frac{\partial y_B}{\partial X} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ l_1 \sin \alpha_1 \sin \theta + l_2 \cos \alpha_2 \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.6)$$

A l'instant du double impact on a $\theta = 0$ d'où :

$$\vec{n}_A \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -l_1 \cos \alpha_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}_B \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ l_2 \cos \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

On en déduit l'expression des vecteurs tangents aux deux contraintes (voir la figure 9.3) :

$$\vec{t}_A \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ (l_1 \cos \alpha_1)^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{t}_B \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ (-l_2 \cos \alpha_1)^{-1} \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

On détermine les configurations du bloc telles que le double support soit possible. Il faut donc que la configuration du bloc soit telle que:

$$\text{DS possible} \iff \theta_{kin}^{12}(t_k) \leq \frac{\pi}{2} \quad (9.9)$$

L'angle θ_{kin}^{12} est défini au sens de la métrique cinétique (voir l'équation (8.2)) d'où

$$\theta_{kin}^{12}(t_k) \leq \frac{\pi}{2} \iff \vec{t}_A M(t_k) \vec{t}_B \geq 0 \quad (9.10)$$

Le bloc est plan, $X = (x_G, y_G, \theta)^T$, la matrice d'inertie du bloc est :

$$M(t_k) = \begin{pmatrix} m_{bloc} & 0 & 0 \\ 0 & m_{bloc} & 0 \\ 0 & 0 & I_{bloc} \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

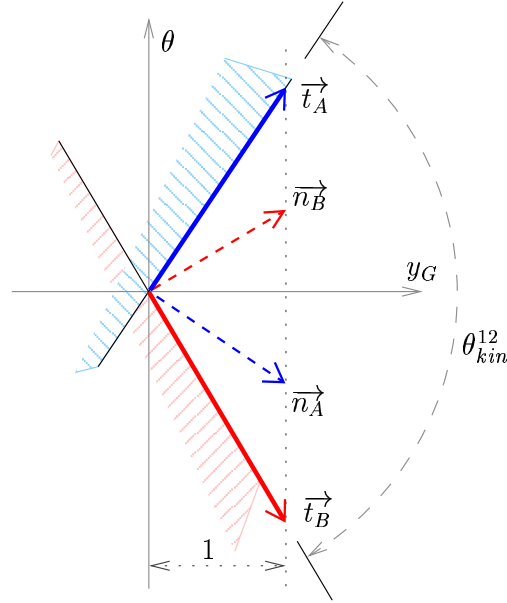


FIG. 9.3 – Vecteurs normaux et vecteurs tangents

où m_{bloc} représente la masse du bloc, et I_{bloc} son moment d'inertie par rapport à son centre de masse.

La condition (9.10) se transforme en :

$$m_{bloc} - \frac{1}{l_1 l_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2} I_{bloc} \geq 0 \quad (9.12)$$

L'inégalité (9.12) est équivalente à :

$$l_1 l_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \geq \frac{I_{bloc}}{m_{bloc}} \quad (9.13)$$

On remarque que pour $\theta = 0$, les expressions $l_1 \cos \alpha_1$ et $l_2 \cos \alpha_2$ représentent la projection du centre de masse G sur le sol. La condition (9.13) devient :

$$(x_G - x_A)(x_B - x_G) \geq \frac{I_{bloc}}{m_{bloc}} \quad (9.14)$$

Remarque 9 : On remarque que $(x_G - x_A)(x_B - x_G)$ est maximum lorsque la projection de G est exactement entre les deux points de contact A et B . Cela veut dire que si l'on compare le bloc au robot bipède, la configuration la plus favorable à un double support est lorsque la projection du centre de gravité du bipède est entre ses deux pieds. ■

9.2 Application au Rabbit

Nous allons appliquer le résultat précédent en considérant le robot Rabbit comme un bloc de forme variable. Au moment de l'impact, le comportement du bipède sera modélisé par le comportement qu'un bloc de même masse et de même inertie.

9.2.1 Equivalence bloc - Rabbit

Soit l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3 : *A l'instant d'un double impact, le comportement du bipède (8.1) est équivalent à celui du bloc de forme variable de la figure 9.1 avec une inertie égale à celle du bipède $I(q)$ et de points de contact avec le sol A et B correspondant aux positions des pieds du bipède.*

En supposant l'hypothèse 3 vérifiée, la condition (9.1) de la proposition 11 devient :

$$(x_G - x_A)(x_B - x_G) \geq \frac{I(q)}{M_{\text{bipède}}} \quad (9.15)$$

Dans l'expression (9.15), les termes x_A , x_B et x_G ainsi que $I(q)$ sont fonction de la configuration $q(t_k)$ du bipède à l'impact. On résout donc notre problème de double support en s'assurant que le bipède est dans la bonne configuration au moment de l'impact. Il faut donc trouver la configuration q_{impact} qui maximise $(x_G - x_A)(x_B - x_G)$ tout en minimisant $I(q)$. Nous allons maintenant voir comment on peut calculer $I(q)$.

9.2.2 Expression de $I(q)$

Ce bipède est un système plan, tout les axes de rotation sont parallèle, on peut donc utiliser le théorème de Huyghens-Steiner pour calculer l'inertie du bipède connaissant l'inertie de chacun de ses éléments.

Le bipède est composé de 5 corps, soit :

- S_i le i -ème solide qui compose le bipède,
- G_i le centre de masse du solide S_i ,
- m_i la masse du solide S_i
- I_i l'inertie du solide S_i par rapport à G_i
avec $1 \leq i \leq 5$.

Notation: On note $I(O, \Sigma)$, l'inertie du solide Σ par rapport au point O .

Avec cette notation on a:

$$\begin{cases} I(q) = I(G, \text{Bipède}) = \sum_{i=1}^5 I(G, S_i) \\ I_i = I(G_i, S_i) \end{cases} \quad (9.16)$$

Le théorème de Huyghens-Steiner nous donne que:

$$I(G, S_i) = I(G_i, S_i) + m_i G G_i^2 \quad (9.17)$$

Les équations (9.16) et (9.17) nous donnent :

$$I(q) = \sum_{i=1}^5 I(G_i, S_i) + m_i G G_i^2 \quad (9.18)$$

Et finalement

$$I(q) = \sum_{i=1}^5 I_i + \sum_{i=1}^5 m_i G G_i^2 \quad (9.19)$$

9.2.3 Application aux données numériques du Rabbit

En prenant le cas le plus favorable c'est-à-dire x_G au milieu de $[x_A; x_B] = d$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{4} &\geq \frac{I(q)}{m} \\ d &\geq \sqrt{\frac{4I(q)}{m}} \end{aligned} \quad (9.20)$$

En prenant les caractéristiques de masse et d'inertie du robot Rabbit on trouve les résultats suivants :

- Si on néglige les masses virtuelles du théorème de Huygens (les termes $m_i G G_i^2$ de l'équation (9.19)) on obtient:

$$\text{longueur du pas} = d \geq \sqrt{\frac{4.2,67}{32}} \geq 57\text{cm} \quad (9.21)$$

- Si on suppose que le centre de masse G est confondu avec les hanches, et en tenant compte des masses virtuelles du théorème de Huygens on obtient:

$$d \geq 77\text{cm} \quad (9.22)$$

- Si on prend le modèle complet du bipède, et en résolvant avec Matlab le petit problème d'optimisation énoncé dans la section 9.2.1, on trouve une configuration qui marche en double support ($\theta_{kin}^{12} \leq \frac{\pi}{2}$) telle que la longueur du pas soit d'au moins 82cm (voir la figure 9.4).

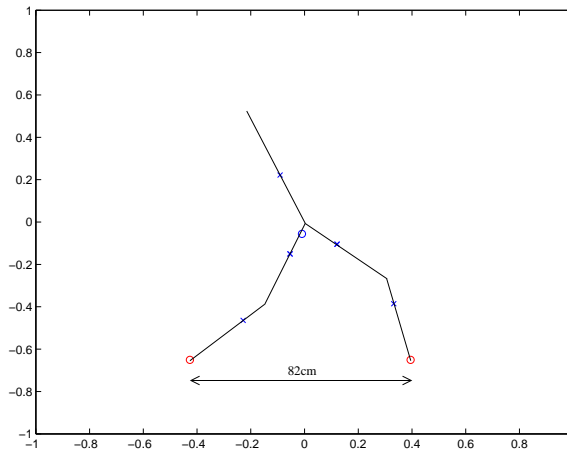


FIG. 9.4 – *Configuration admissible pour une marche en double support*

9.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu une nouvelle approche du double impact pour le cas d'un robot bipède plan. Après avoir étendu des résultats au cas d'un bloc de forme variable, nous avons constaté que le double support n'est possible qu'à la condition de faire des très grands pas (longueurs de pas supérieures à 82cm). Cette contrainte est beaucoup trop forte car elle implique des allures de marche qui ne sont pas naturelles. En effet des pas trop longs impliquent des inclinaisons trop importantes du tronc (voir figure 9.4).

Conclusion générale

10.1 Conclusions

La contribution principale de cette thèse concerne la poursuite de trajectoires pour des systèmes mécaniques non-réguliers.

Après avoir mené une réflexion sur les **différences fondamentales** qui existent entre la **poursuite de trajectoires** pour des systèmes réguliers et des systèmes non-réguliers, nous avons présenté une série de définitions et de propositions qui permettent d'étudier la **stabilité** de ces systèmes **discontinus**.

La seconde contribution de cette thèse correspond au schéma de commande proposé qui **étend les lois** de [Paden & Panja, 1988] et [Slotine & Li, 1988] aux cas non réguliers. Ce contrôleur permet de faire de la **poursuite de trajectoires** comportant à la fois des phases libres et des phases contraintes. Outre le fait de proposer une méthode permettant de **stabiliser** un système dynamique sur une contrainte tout en ayant certaines garanties de stabilité. Cette étude propose aussi une façon propre de décoller le système de la contrainte en fin de contact. De plus cette loi de commande est extensible aux cas des **impacts multiples** sous réserve de quelques conditions.

Enfin la dernière contribution originale de cette thèse concerne les **robots bipèdes plans**. Dans les chapitres 9 et suivants nous proposons une nouvelle façon de modéliser le comportement d'un bipède au moment des **impacts** entre les pieds du robot et le sol. Nous proposons un modèle de **type bloc** qui permet, à la différence des modèles de type "pendule inversé", de prendre en considération les doubles impacts nécessaires à une marche en **double support**.

10.2 Perspectives

D'une part, en ce qui concerne la poursuite de trajectoires, les perspectives liées à ce travail sont l'extension des résultats du chapitre 7 au cas des **n-impacts** avec $n \geq 3$. Ainsi que de proposer une stratégie de commande pour des contraintes dont l'angle **cinétique est obtus** ($\theta_{kin}^{12} \geq \frac{\pi}{2}$). Dans un premier temps nous pourrions envisager la cas plastique ($e_n = 0$ et $\theta_{kin}^{12} \geq \frac{\pi}{2}$).

En ce qui concerne l'analyse de stabilité, il serait intéressant de relaxer certaines hypothèses faites sur les lois proposées, et plus particulièrement sur les limitations de la loi de Paden-Panja lorsqu'il y a des **couplages dans la matrice d'inertie** ($M_{12} \neq 0$). Comme nous l'avons vu sur les simulations, cette loi semble être stable dans certains cas ne vérifiant pas toutes les hypothèses suffisantes ce qui permet d'espérer quelques résultats dans cette direction.

Un dernier point concernant la poursuite de trajectoires serait de considérer des **contacts avec frottement** ainsi que des systèmes comportant de l'**élasticité**.

La résolution de ces différents points permettrait d'envisager l'application de cette loi de commande pour la marche d'un robot **bipède complètement actionné** (ce qui exclu pour l'instant le robot Rabbit).

D'autre part en ce qui concerne les robots bipèdes sous-actionnés tels que le robot Rabbit, les perspectives sont d'étendre l'analogie de type bloc avec une loi plus complète, c'est-à-dire une loi qui prenne en compte les frottements.

Puis, un modèle complet du double impact validé sur la plateforme expérimentale Rabbit permettrait de caractériser les configurations dans lesquelles le robot doit se présenter pour obtenir un **double support**.

Le dernier point serait de développer une commande qui puisse enchaîner des phases de double puis de simple support.

L'ensemble du travail relatif à la poursuite de trajectoires a fait l'objet de plusieurs publications : [Bourgeot & Brogliato, 2002], [Bourgeot & Brogliato, 2003] et [Bourgeot & Brogliato, 2005].

Bibliographie

- Avila-Vilchis, J.C., Brogliato, B., Dzul, R. & Lozano, R. [2003] “Nonlinear modelling and control of helicopters,”. *Automatica*, **39**(9), 1583–1596.
- Azevedo, C. [2002]. *Contrôle de la locomotion artificielle : de l’homme aux robots*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG).
- Ballard, P. [2000] “The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints,”. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **154**(3), 199–274.
- Ballard, P. [2001] “Formulation and well-posedness of the dynamics of rigid-body systems with perfect unilateral constraints,”. *Phil. Trans. Royal Soc. Lond. A*, **359**(1789), 2327–2346.
- Bourgeot, J.M. & Brogliato, B. [2002] “Tracking control of rigid manipulators subject to unilateral constraints,”. In *Proc. of 6th ASME Conf. on Engineering Systems Design and Analysis*, Istanbul, Turkey.
- Bourgeot, J.M. & Brogliato, B. [2003] “Tracking control of nonsmooth complementarity lagrangian systems,”. In *Proceedings of the European Control Conference ECC’03*, University of Cambridge, UK.
- Bourgeot, J.M. & Brogliato, B. [2005] “Tracking control of complementarity lagrangian systems,”. *The International Journal of Bifurcation and Chaos*, special issue on Non-smooth Dynamical Systems, **15**(3), *accepté, à paraître*.
- Brogliato, B. [1999]. *Nonsmooth Mechanics*. Springer CCES, London, 2nd edn., erratum and addenda available at <http://www.inrialpes.fr/bipop/people/brogliato/erratum.ps>.
- Brogliato, B. [2004] “Absolute stability and the Lagrange-Dirichlet theorem with monotone multivalued mappings,”. *Systems and Control Letters*, **51**(5), 343–353.
- Brogliato, B., Niculescu, S. & Orhant, P. [1997] “On the control of finite dimensional mechanical systems with unilateral constraints,”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**(2), 200–215.
- Brogliato, B., Niculescu, S. & Monteiro-Marques, M. [2000] “On tracking control of a class of complementary-slackness mechanical systems,”. *Systems and Control Letters*, **39**(4), 255–266.
- Brogliato, B., Dam, A.A.t., Paoli, L., Genot, F. & Abadie, M. [2002] “Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems,”. *ASME Applied Mechanics Reviews*, **55**(2), 107–150.
- Bruma, S. & Otten, R.H. [1997] “Novel simulation of deep-submicron mosfet circuits,”. In *Proceedings of the 1997 International Conference on Computer Design (ICCD ’97)*, 62–67, Austin, TX.

- Canudas-de-Wit, C., Siciliano, B. & Bastin, G., eds. [1996]. *Theory of robot control*. Communications and Control Engineering, Springer Verlag, London.
- Chevallereau, C., Abba, G., Aoustin, Y., Plestan, F., Westervelt, E., Canudas-de-Wit, C. & Grizzle, J. [2003] “Rabbit: A testbed for advanced control theory,”. *IEEE Control Systems Magazine*, **23**(5), 57–79.
- Clarke, F. [1990]. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. SIAM Classics in Applied Mathematics, 5.
- Consortium Scilab [2004] “<http://www.scilab.org>,”. Page web de Scilab.
- Frémond, M. [2002]. *Non-Smooth Thermomechanics*. Berlin, London: Springer.
- Génot, F. [1998]. *Contribution à la modélisation et à la commande des systèmes mécaniques de corps rigides avec contraintes unilatérales*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Glocker, C. [2001]. *Set Valued Force Laws: Dynamics of Non-Smooth Systems*, vol. 1 of *Lecture Notes in Applied Mechanics*. Springer.
- Glocker, C. [2002] “The geometry of Newtonian impacts with global dissipation index for moving sets,”. In C. Baniotopoulos, ed., *Proc. of the Int. Conf. on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics*, 283–290, Thessaloniki.
- Goeleven, D., Motreanu, D. & Motreanu, V. [2003] “On the stability of stationary solutions of first order parabolic variational inequalities,”. *Advances in Nonlinear variational Inequalities*, **6**, 1–30.
- Hiriart-Urruty, J.B. & Lemaréchal, C. [1996]. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*. Springer, Berlin.
- Horn, R. & Johnson, C. [1999]. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.
- Hurmuzlu, Y., Génot, F. & Brogliato, B. [2004] “Modelling, stability and control of biped robots – A general framework,”. *Automatica*, **40**(10), 1647–1664.
- Kajita, S. & Tani, K. [1996] “Experimental study of biped dynamic walking,”. *IEEE Control Systems Magazine*, **16**(1), 13–19.
- Komanduri, R. [1993] “Machining and grinding - a historical review of classical papers,”. *ASME Applied Mechanics Review*, **46**(3), 80–132.
- Lawrence, C.T., Zhou, J.L. & Tits., A.L. [1998] “http://www.isr.umd.edu/labs/cacse/fsqp/fsqp_dist.html,”. Page web de fsqp.
- Lozano, R., Brogliato, B., Egeland, O. & Maschke, B. [2000]. *Dissipative Systems Analysis and Control. Theory and Applications*. Communications and Control Engineering, Springer Verlag, London.
- Mabrouk, M. [1998] “A unified variational model for the dynamics of perfect unilateral constraints,”. *European Journal of Mechanics A/Solids*, **17**(5), 819–842.
- McClamroch, N. & Wang, D. [1988] “Feedback stabilization and tracking of constrained robots,”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**(5), 419–426.

- Menini, L. & Tornambè, A. [2001] “Asymptotic tracking of periodic trajectories for a simple mechanical system subject to nonsmooth impacts,”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46**(7), 1122–1126.
- Mills, J.K. & Lokhorst, D.M. [1993] “Control of robotic manipulators during general task execution: A discontinuous control approach,”. *International Journal of Robotics Research*, **12**(2), 146–163.
- Moreau, J.J. [1988] “Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics,”. In *Nonsmooth Mechanics and Applications*, CISM Courses and Lectures no 302, Springer-Verlag.
- Moreau, J.J. [2003] “An introduction to unilateral dynamics,”. In M. Frémond & F. Macceri, eds., *Novel Approaches in Civil Engineering*, 1–45, Springer Verlag.
- Murty, K.G. [1997]. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Internet Edition, <http://www-personal.engin.umich.edu/~murty/book/LCPbook/>.
- Paden, B. & Panja, R. [1988] “Globally asymptotically stable pd+ controller for robot manipulators,”. *Int. J. Control*, **47**(6), 1697–1712.
- Pagilla, P.R. [2001] “Control of contact problem in constrained Euler-Lagrange systems,”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46**(10), 1595–1599.
- Paoli, L. [2002] “A numerical scheme for impact problems with inelastic shocks: a convergence result in the multi-constraint case,”. In C. Baniotopoulos, ed., *Proc. of the Int. Conf. on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics*, 269–274, Thessaloniki, Greece.
- Pfeiffer, F. & Glocker, C. [1996]. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. series in nonlinear science, Wiley.
- Ramachandran, N., Pande, S. & Ramakrishnan, N. [1994] “The role of deburring in manufacturing: A state-of-the-art survey,”. *Journal of Materials Processing Technology*, **44**, 1–13.
- Schatzman, M. [1998] “Uniqueness and continuous dependence on data for one-dimensional impact problem,”. *Math. Comp. Modelling*, **28**(4-8), 1–18.
- Shia, C.Y., Stango, R. & Heinrich, S. [1998] “Analysis of contact mechanics for a circular filamentary brush/workpart system,”. *ASME J. of Manufacturing Science and Engineering*, **120**(4), 715–721.
- Slotine, J.J. & Li, W. [1988] “Adaptive manipulator control: a case study,”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**(11), 995–1003.
- Spong, M., Ortega, R. & Kelly, R. [1990] “Adaptive manipulator control: A case study,”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **35**(6), 761–762.
- Studny, D., Rittel, D. & Zussman, E. [1999] “Impact fracture of screws for disassembly,”. *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*, **121**(1), 118–126.
- Westervelt, E. [2003]. *Toward a Coherent Framework for the Control of Planar Biped Locomotion*. Thèse de doctorat, University of Michigan.
- Westervelt, E., Buche, G. & Grizzle, J. [2004] “Experimental validation of a framework for the design of controllers that induce stable walking in planar bipeds,”. *The International Journal of Robotics Research*, **23**(6), 559–582.

- Wieber, P.B. [2000]. *Modélisation et commande d'un robot marcheur anthropomorphe*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.
- Yoshikawa, T. [1987] "Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators description of hand constraints and calculation of joint driving force,". *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, **3**(5), 386–392.
- Zavala-Rio, A. & Brogliato, B. [1999] "On the control of a one degree-of-freedom juggling robot,". *Dynamics and Control*, **9**, 67–90.

Annexe A

Preuve de la proposition 7

Pour rendre les calculs plus lisibles, nous faisons un abus de notation en écrivant :

$$V(t, \tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)) \equiv V(t)$$

i) Sur $[\tau_0^{k_{cyc}}, t_0)$, on a $\dot{V}_2(t) \leq 0$, et donc $V_2(t_0^-) \leq V_2(\tau_0^{k_{cyc}})$. De l'expression de $V(t)$ en (5.48), on déduit que :

$$V_2(\tau_0^{k_{cyc}}) \geq V_2(t_0^-) \geq \gamma_2 \gamma_1 \tilde{q}(t_0^-)^T \tilde{q}(t_0^-) \geq \gamma_2 \gamma_1 \tilde{q}_1^2(t_0^-) \quad (\text{A.1})$$

d'où

$$\sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2 \gamma_1}} \geq |q_1(t_0) - q_{1d}^*(t_0^-)| = |q_{1d}^*(t_0^-)| \quad (\text{A.2})$$

car $q_1(t_0) = 0$. Ceci démontre le point (i) de la proposition 7. La trajectoire désirée $q_{1d}^*(\cdot)$ est choisie comme étant une fonction décroissante, d'après l'inégalité (A.2) nous avons donc

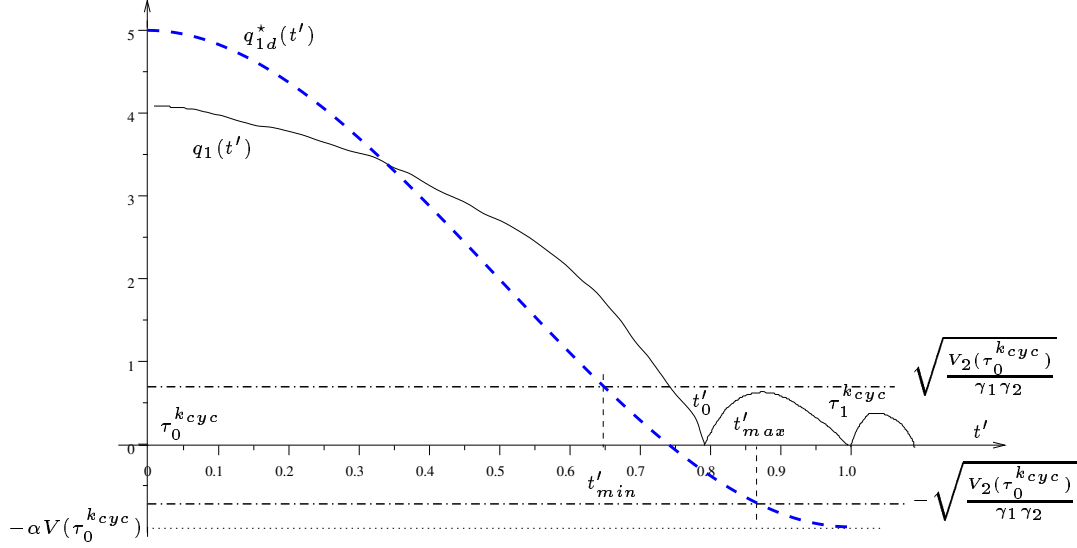
$t_{min} \leq t_0 \leq t_{max}$, avec $q_{1d}^*(t_{min}) = \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2 \gamma_1}}$ et $q_{1d}^*(t_{max}) = -\sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2 \gamma_1}}$ (voir la figure A.1).

Remarque 10 : D'après la valeur de t_{max} , il découle que si $\alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}}) > \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2 \gamma_1}}$, alors on a $t_0 \leq \tau_1^{k_{cyc}}$ pour le cycle k . ■

ii) Le signal $q_{1d}^*(t)$ est une fonction qui décroît jusqu'à la valeur $-\alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}})$. Choisissons un polynôme de degré 3 pour caractériser $q_{1d}^*(t)$. Nous avons les conditions aux limites suivantes : $t_{ini} = \tau_0^{k_{cyc}}$ et $t_{end} = \tau_1^{k_{cyc}}$. Après quelques calculs nous allons exprimer une borne supérieure de $\dot{q}_{1d}^*(t)$ sur $[t_{min}, t_{max}]$ (sachant que $t_0 \in [t_{min}, t_{max}]$) :

$$\begin{cases} q_{1d}^*(t) &= a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \\ \dot{q}_{1d}^*(t) &= 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 \\ \text{pour } t_{ini} = \tau_0^{k_{cyc}} &: q_{1d}^*(t_{ini}) = q_{1d}(\tau_0^{k_{cyc}}) \quad \text{et } \dot{q}_{1d}^*(t_{ini}) = 0 \\ \text{pour } t_{end} = \tau_1^{k_{cyc}} &: q_{1d}^*(t_{end}) = -\alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}}) \quad \text{et } \dot{q}_{1d}^*(t_{end}) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Pour calculer $\max_{t \in [t_{min}, t_{max}]} |q_{1d}^*(t)|$, nous allons faire un changement de l'échelle de temps


 FIG. A.1 – Trajectoire de transition de $q_{1d}^*(t)$

$t = t'(t)$, tel que $t'(\tau_0^{kcy c}) = 0$ et $t'(\tau_1^{kcy c}) = 1$, et donc $t'(t) = \frac{t - \tau_0^{kcy c}}{\tau_1^{kcy c} - \tau_0^{kcy c}}$. Nous obtenons :

$$\begin{cases} a_3 = 2[q_{1d}(\tau_0^{kcy c}) + \alpha V_1(\tau_0^{kcy c})] \\ a_2 = -3[q_{1d}(\tau_0^{kcy c}) + \alpha V_1(\tau_0^{kcy c})] \\ a_1 = 0 \\ a_0 = q_{1d}^*(\tau_0^{kcy c}) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

et le signal $q_{1d}^*(t)$ devient :

$$\begin{cases} \dot{q}_{1d}^*(t') = [q_{1d}^*(\tau_0^{kcy c}) + \alpha V_1(\tau_0^{kcy c})](2t'^3 - 3t'^2) + q_{1d}^*(\tau_0^{kcy c}) \\ \dot{q}_{1d}^*(t') = -6[q_{1d}^*(\tau_0^{kcy c}) + \alpha V_1(\tau_0^{kcy c})](1 - t')t' \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

D'après l'équation (A.5), nous voyons que $q_{1d}^*(t')$ est décroissante sur $t' \in [0,1]$. Par conséquent

$$q_{1d}^*(t'_0) \leq q_{1d}^*(t'_{min}) \leq \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{kcy c})}{\gamma_2 \gamma_1}} \quad (\text{A.6})$$

En insérant (A.5) dans (A.6), on obtient :

$$[q_{1d}^*(\tau_0^{kcy c}) + \alpha V_1(\tau_0^{kcy c})](2t_0'^3 - 3t_0'^2) + q_{1d}^*(\tau_0^{kcy c}) \leq \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{kcy c})}{\gamma_2 \gamma_1}} \quad (\text{A.7})$$

Alors,

$$t_0'^2(3 - 2t_0') \geq \frac{q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) - \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2\gamma_1}}}{q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) + \alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}})} \quad (\text{A.8})$$

Pour $t \geq 0$, on a $t(2 - t) \geq t^2(3 - 2t)$, d'où:

$$t_0'(2 - t_0') \geq \frac{q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) - \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2\gamma_1}}}{q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) + \alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}})} \quad (\text{A.9})$$

Une racine de $t(2 - t) = a$ est $t = 1 - \sqrt{1 - a}$, il en résulte que :

$$\begin{aligned} t_0' &\geq 1 - \sqrt{1 - \frac{q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) - \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2\gamma_1}}}{q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) + \alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}})}} \\ &\geq 1 - \sqrt{\frac{\alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}}) + \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2\gamma_1}}}{\alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}}) + q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}})}}} = t_{min}' \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Sur $[t_{min}', t_{max}']$, nous avons $|\dot{q}_{1d}^*(t')| \leq |\dot{q}_{1d}^*(t_{min}')|$. Donc on a aussi :

$$|\dot{q}_{1d}^*(t_0')| \leq -6(q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) + \alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}}))(1 - t_{min}')t_{min}' \quad (\text{A.11})$$

En remplaçant dans (A.11), t_{min}' par sa valeur (cf. A.10), on obtient :

$$|\dot{q}_{1d}^*(t_0')| \leq 6(q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) + \alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}})) \sqrt{\frac{\alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}}) + \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2\gamma_1}}}{\alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}}) + q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}})}}} \quad (\text{A.12})$$

L'expression (A.12) se simplifie en :

$$|\dot{q}_{1d}^*(t_0')| \leq 6 \sqrt{(q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) + \alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}}))(\alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}}) + \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2\gamma_1}})} \quad (\text{A.13})$$

Maintenant nous repassons de la variable temporelle t' à t . L'inégalité (A.13) devient :

$$|\dot{q}_{1d}^*(t_0)| \leq \frac{6}{\tau_1^{k_{cyc}} - \tau_0^{k_{cyc}}} \sqrt{(q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) + \alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}}))(\alpha V_1(\tau_0^{k_{cyc}}) + \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2\gamma_1}})} \quad (\text{A.14})$$

D'après l'expression des fonctions de Lyapunov (5.48), nous avons que $V_2(t) \geq V_1(t)$. Donc l'inégalité (A.14) devient :

$$|\dot{q}_{1d}^*(t_0)| \leq \frac{6}{\tau_1^{k_{cyc}} - \tau_0^{k_{cyc}}} \sqrt{(q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) + \alpha V_2(\tau_0^{k_{cyc}}))(\alpha V_2(\tau_0^{k_{cyc}}) + \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2 \gamma_1}})} \quad (\text{A.15})$$

Soit le paramètre K_0 suivant :

$$K_0 = \frac{6}{\tau_1^{k_{cyc}} - \tau_0^{k_{cyc}}} \sqrt{\alpha q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) + q_{1d}^*(\tau_0^{k_{cyc}}) \sqrt{\frac{1}{\gamma_1 \gamma_2}} + \alpha^2 + \alpha \sqrt{\frac{1}{\gamma_2 \gamma_1}}} \quad (\text{A.16})$$

Si le système est initialisé avec $V_2(\tau_0) \leq 1$, alors $V_2^{1/4}(t) \geq V_2^{1/2}(t) \geq V_2(t)$ et l'inégalité (A.15) devient :

$$|\dot{q}_{1d}^*(t_0^-)| \leq K_0 V_2^{1/4}(\tau_0^{k_{cyc}}) \quad (\text{A.17})$$

Le point (ii) de la proposition 7 est démontré. ■

Annexe B

Preuve de la proposition 8

(i) **Preuve du premier résultat de la proposition 8:** Montrons que les points (a) (b) et (d) de la proposition 2 sont satisfaits.

(a) Hors des phases $I_{k_{cyc}}$, on a $\dot{V}_1(t) = -\gamma_1 s(t)^T s(t)$ [Slotine & Li, 1988], alors on a d'après l'équation (5.48) :

$$\|s(t)\|^2 \geq \frac{2}{\lambda_{max}(M(q))} V_1(t) \quad (\text{B.1})$$

où $\lambda_{min}(\cdot)$ et $\lambda_{max}(\cdot)$ représentent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre. On en déduit que :

$$\dot{V}_1(t) \leq -\frac{2\gamma_1}{\lambda_{max}(M(q))} V_1(t) \quad (\text{B.2})$$

La condition (a) de la proposition 2 est satisfaite avec $\gamma = \frac{2\gamma_1}{\lambda_{max}(M(q))}$.

∞

(b) Après le premier impact, la dynamique en boucle fermée du système défini par (5.47) et (4.1) est donnée par

$$M(q)\dot{s}(t) + C(q, \dot{q})s(t) + \gamma_1 \bar{s}(t) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Calculons $\dot{V}_1(t)$ le long des trajectoires de (B.3) :

$$\dot{V}_1(t) = \frac{1}{2} s(t)^T \dot{M}(t) s(t) + s(t)^T M(q) \dot{s}(t) \quad (\text{B.4})$$

où $\dot{M}(t) = \frac{d}{dt}[M(q(t))]$. En insérant (B.3) dans (B.4) et en utilisant le fait que $\dot{M}(t) - 2C(q, \dot{q})$ est une matrice antisymétrique [Lozano *et al.*, 2000, lemma 5.4] nous obtenons :

$$\dot{V}_1(t) = -\gamma_1 s(t)^T \bar{s}(t) \quad (\text{B.5})$$

Après le premier impact le signal de référence q_d^* est constant, les erreurs \tilde{q} et \bar{q} sont définies par l'équation (4.4) tel que $\tilde{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) - q_{2d}^* \end{pmatrix}$ et $\bar{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) - q_{1d}^* \\ q_2(t) - q_{2d}^* \end{pmatrix}$. On a donc l'égalité suivante: $\dot{\tilde{q}}(t) = \dot{\bar{q}}(t)$ et on en déduit que :

$$\begin{aligned} \bar{s}(t) &= \dot{\tilde{q}}(t) + \gamma_2 \bar{q}(t) \\ &= \dot{\tilde{q}}(t) + \gamma_2 \tilde{q}(t) - \gamma_2 \begin{pmatrix} q_{1d}^* \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= s(t) - \gamma_2 \begin{pmatrix} q_{1d}^* \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Introduisons (B.6) dans (B.5) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(t) &= -\gamma_1 s(t)^T s(t) + \gamma_1 \gamma_2 s(t)^T \begin{pmatrix} q_{1d}^* \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -\gamma_1 s(t)^T s(t) + \gamma_1 \gamma_2 s_1(t) q_{1d}^* \\
 &= -\gamma_1 s(t)^T s(t) + \gamma_1 \gamma_2 \dot{q}_1(t) q_{1d}^* + \gamma_1 \gamma_2^2 q_1(t) q_{1d}^* \\
 &= -\gamma_1 s(t)^T s(t) + \gamma_1 \gamma_2 \dot{q}_1(t) q_{1d}^* - \gamma_1 \gamma_2^2 q_1(t) |q_{1d}^*|
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Utilisant le fait que $q_1(t) \geq 0$, $q_1(t_k) = 0$ et que $q_{1d}^* = -\alpha V(\tau_0^{k_{cyc}}) \leq 0$, alors entre deux impacts nous avons pour tout $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 V_1(t_{k+1}^-) - V_1(t_k^+) &= \int_{(t_k, t_{k+1})} \dot{V}_1(t) dt \\
 &= - \int_{(t_k, t_{k+1})} \gamma_1 s(t)^T s(t) dt - \int_{(t_k, t_{k+1})} \gamma_1 \gamma_2^2 q_1(t) |q_{1d}^*| dt \\
 &\quad + \gamma_1 \gamma_2 q_{1d}^* [q_1(t)]_{t_k}^{t_{k+1}} \\
 &= - \int_{(t_k, t_{k+1})} \gamma_1 s(t)^T s(t) dt - \int_{(t_k, t_{k+1})} \gamma_1 \gamma_2^2 q_1(t) |q_{1d}^*| dt \\
 &\leq 0
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

La condition **(b)** de la proposition 2 est satisfaite.

∞

(d) Commençons par le calcul de $\sigma_V(t_k)$.

Pour $k \geq 1$, $q_d(t_k^+) = q_d(t_k^-)$ et $\dot{q}_d(t_k^+) = \dot{q}_d(t_k^-) = 0$ (voir l'équation (4.4)). Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{V_1}(t_k) &= V_1(t_k^+) - V_1(t_k^-) \\
 &= \frac{1}{2} [(\dot{\tilde{q}}(t_k^+) + \gamma_2 \tilde{q}(t_k^+))^T M_k (\dot{\tilde{q}}(t_k^+) + \gamma_2 \tilde{q}(t_k^+)) \\
 &\quad - (\dot{\tilde{q}}(t_k^-) + \gamma_2 \tilde{q}(t_k^-))^T M_k (\dot{\tilde{q}}(t_k^-) + \gamma_2 \tilde{q}(t_k^-))] \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}(t_k^+)^T M_k \dot{q}(t_k^+) - \frac{1}{2} \dot{q}(t_k^-)^T M_k \dot{q}(t_k^-) + \gamma_2 [\dot{q}(t_k^+)^T M_k \tilde{q}(t_k^+) \\
 &\quad - \dot{q}(t_k^-)^T M_k \tilde{q}(t_k^-)] \\
 &= T_L(t_k) + \gamma_2 [\dot{q}(t_k^+) - \dot{q}(t_k^-)]^T M_k \tilde{q}(t_k)
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

où $M_k \triangleq M(q(t_k))$. Utilisant le fait que $q_1(t_k) = 0$ et que $q_{1d}(t) = 0$ après le premier impact (voir(4.4)), on obtient de (B.9) :

$$\sigma_{V_1}(t_k) = T_L(t_k) + \gamma_2 \tilde{q}_2(t_k)^T [M_{21} \sigma_{\dot{q}_1}(t_k) + M_{22} \sigma_{\dot{q}_2}(t_k)] \tag{B.10}$$

Insérant (5.42) dans (B.10), on obtient pour tout $k \geq 1$:

$$\sigma_{V_1}(t_k) = T_L(t_k) \leq 0 \quad (\text{B.11})$$

Pour $k = 0$, deux cas sont à examiner :

- Si $t_0 > \tau_1^{k_{cyc}}$ alors nous avons encore $q_d(t_0^+) = q_d(t_0^-)$ et $\dot{q}_d(t_0^+) = \dot{q}_d(t_0^-) = 0$, et nous pouvons encore utiliser le résultats de l'équation (B.11) pour obtenir :

$$\sigma_{V_1}(t_0) = T_L(t_0) \leq 0 \quad (\text{B.12})$$

- Si $t_0 < \tau_1^{k_{cyc}}$ alors nous avons $q_{1d}(t_k^-) \neq q_{1d}(t_k^+) = 0$ et $\dot{q}_{1d}(t_k^-) \neq \dot{q}_{1d}(t_k^+) = 0$. Commençons par calculer le saut initial :

$$\begin{aligned} \sigma_{V_1}(t_0) = & T_L(t_0) - \frac{1}{2} \dot{q}_d(t_0^-)^T M(q(t_0)) \dot{q}_d(t_0^-) - \frac{1}{2} \gamma_2^2 q_{1d}(t_0^-) M_{11}(q(t_0)) q_{1d}(t_0^-) \\ & + \gamma_2 [(\ddot{\tilde{q}}_1(t_0^-) M_{11}(q(t_0)) + \dot{\tilde{q}}_2(t_0^-)^T M_{21}(q(t_0))) q_{1d}(t_0^-) \\ & + \dot{q}_{1d}(t_0^-) M_{12}(q(t_0)) \tilde{q}_2(t_0^-)] + \gamma_2^2 q_{1d}(t_0^-) M_{12}(q(t_0)) \tilde{q}_2(t_0^-) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

En utilisant (B.12), (B.13) et (B.11) on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{V_1}(t_k) \leq & \gamma_2 \|\dot{\tilde{q}}(t_0^-)\| \|q_{1d}(t_0^-)\| \|M_1(q(t_0))\| + \gamma_2 \|\dot{q}_{1d}(t_0^-)\| \\ & \|M_{12}(q(t_0))\| \|\tilde{q}(t_0^-)_2\| + \gamma_2^2 \|q_{1d}(t_0^-)\| \|M_{12}(q(t_0))\| \|\tilde{q}_2(t_0^-)\| \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

où $M_1 = [M_{11}; M_{12}]^T$. Maintenant nous allons montrer que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{V_1}(t_k) \leq K V_2^\kappa(\tau_0^{k_{cyc}}) \quad (\text{B.15})$$

où $K > 0$. Calculons d'abord des majorants pour $q_{1d}(t_0^-)$, $\dot{q}_{1d}(t_0^-)$, $\dot{\tilde{q}}(t_0^-)$ et $\tilde{q}_2(t_0^-)$. Sur $[\tau_0^{k_{cyc}}, t_0)$, nous avons $\dot{V}_2(t) \leq 0$, si bien que $V_2(t_0) \leq V_2(\tau_0^{k_{cyc}})$. De l'expression de la fonction de Lyapunov (5.48) on obtient :

$$V_2(\tau_0^{k_{cyc}}) \geq V_2(t_0^-) \geq \gamma_2 \gamma_1 \tilde{q}(t_0^-)^T \tilde{q}(t_0^-) \geq \gamma_2 \gamma_1 \|\tilde{q}_2(t_0^-)\|^2 \quad (\text{B.16})$$

ou encore,

$$\|\tilde{q}_2(t_0^-)\| \leq \|\tilde{q}(t_0^-)\| \leq \sqrt{\frac{V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\gamma_2 \gamma_1}} \quad (\text{B.17})$$

D'après (5.48) on a $V_2(t) \geq \frac{1}{2}s(t)^T M(q)s(t)$. Par conséquent :

$$\|s(t_0^-)\| \leq \sqrt{\frac{2V_2(\tau_0^{k_{cyc}})}{\lambda_{\min}(M)}} \quad (\text{B.18})$$

D'après les équations (B.17), (B.18) et la définition de $s(t)$ on en conclut que

$$\|\dot{\tilde{q}}(t_0^-)\| \leq \|s(t_0^-)\| + \gamma_2 \|\tilde{q}(t_0^-)\| \leq \left[\sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(M(q))}} + \gamma_2 \sqrt{\frac{1}{\gamma_2 \gamma_1}} \right] V_2^{\frac{1}{2}}(\tau_0^{k_{cyc}}) \quad (\text{B.19})$$

D'après les équations (B.17), (B.19), les résultats de la proposition 7, le fait que $V_2(\tau_0^{k_{cyc}}) \leq 1$ et le fait que $q_d(t_0^-) = q_d^*(t_0^-)$ et $\dot{q}_d(t_0^-) = \dot{q}_d^*(t_0^-)$, l'inégalité (B.14) devient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{V_1}(t_k) \leq K V_2^{\frac{3}{4}}(\tau_0^{k_{cyc}}) \quad (\text{B.20})$$

avec

$$K = \left[\sqrt{\frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \lambda_{\min}(M(q))}} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right] \|M_{11}(q(t_0))\| + \left[K_0 \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right] \|M_{12}(q(t_0))\| \quad (\text{B.21})$$

En insérant (5.48) dans (B.20), on trouve

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{V_1}(t_k) \leq K V_1^{\frac{3}{4}}(\tau_0^{k_{cyc}}) + K(\gamma_2 \gamma_1)^{\frac{3}{4}} \|\tilde{q}(\tau_0^{k_{cyc}})\|^{\frac{3}{2}} \quad (\text{B.22})$$

Si bien que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{V_1}(t_k) \leq K V_1^{\frac{3}{4}}(\tau_0^{k_{cyc}}) + \epsilon' \quad (\text{B.23})$$

pour un $\epsilon' > 0$. La condition **(d)** de la proposition 2 est satisfaite. Le système (4.1) bouclé avec le contrôleur (5.47) satisfait à toutes les conditions de la proposition 2 avec $\epsilon \neq 0$. Par conséquent, il est pratiquement faiblement stable sur Ω avec $x(\cdot) = s(\cdot)$, et

$$R = \left(\frac{2}{\lambda_{\min}(M(q))} e^{-\gamma(t_f^{k_{cyc}} - t_\infty)} (1 + K + \epsilon') \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = \frac{2\gamma_1}{\lambda_{\max}(M(q))} \quad (\text{B.24})$$

■

(ii) Preuve du second résultat de la proposition 8: Montrons que les points **(a)** et **(d)** de la proposition 2 sont satisfaits.

(a) En dehors des phases $I_{k_{cyc}}$, on peut calculer que [Spong *et al.*, 1990]

$$\dot{V}_2(t) = -\gamma_1 \dot{\tilde{q}}^T \tilde{q} - \gamma_1 \gamma_2^2 \tilde{q}^T \tilde{q} \quad (\text{B.25})$$

Commençons par majorer $V_2(t)$. De l'expression de la fonction de Lyapunov (5.48) on déduit que :

$$V_2(t) \leq \frac{\lambda_{max}(M(q))}{2} \|\dot{\tilde{q}}\|^2 + \frac{\lambda_{max}(M(q))}{2} \gamma_2^2 \|\tilde{q}\|^2 + \gamma_2 \lambda_{max}(M(q)) \|\dot{\tilde{q}}\| \|\tilde{q}\| + \gamma_1 \gamma_2 \|\tilde{q}\|^2 \quad (\text{B.26})$$

Comme $\|\dot{\tilde{q}}\| \|\tilde{q}\| \leq \|\tilde{q}\|^2 + \|\dot{\tilde{q}}\|^2$ l'inégalité (B.26) peut se réécrire comme :

$$V_2(t) \leq \lambda_{max}(M(q)) \frac{1 + 2\gamma_2}{2\gamma_1} \gamma_1 \|\dot{\tilde{q}}\|^2 + \frac{\lambda_{max}(M(q))(\gamma_2 + 2) + 2\gamma_1}{2\gamma_1 \gamma_2} \gamma_1 \gamma_2^2 \|\tilde{q}\|^2 \quad (\text{B.27})$$

Soit

$$\gamma^{-1} = \max \left[\lambda_{max}(M(q)) \frac{1 + 2\gamma_2}{2\gamma_1} ; \frac{\lambda_{max}(M(q))(\gamma_2 + 2) + 2\gamma_1}{2\gamma_1 \gamma_2} \right] > 0 \quad (\text{B.28})$$

L'inégalité (B.27) devient

$$V_2(t) \leq \gamma^{-1} \left[\gamma_1 \|\dot{\tilde{q}}\|^2 + \gamma_1 \gamma_2^2 \|\tilde{q}\|^2 \right] \quad (\text{B.29})$$

En insérant l'équation (B.25) dans l'inégalité (B.29) on trouve

$$V_2(t) \leq -\gamma^{-1} \dot{V}_2(t) \quad (\text{B.30})$$

Alors $\dot{V}_2(t) \leq -\gamma V_2(t)$, et la condition (a) de la proposition 2 est satisfaite.

∞

(d) Comme $V_2(t) = V_1(t) + \gamma_1 \gamma_2 \tilde{q}^T \tilde{q}$ alors

$$\sigma_{V_2}(t_k) = \sigma_{V_1}(t_k) + \gamma_1 \gamma_2 \sigma_{\|\tilde{q}\|^2}(t_k) \quad (\text{B.31})$$

Pour $k \geq 1$, on a $q_d(t_k^+) = q_d(t_k^-)$, et comme la position $q(t)$ est une fonction continue, alors on a que $\sigma_{\|\tilde{q}\|^2}(t_k) = 0$ et :

$$\sigma_{V_2}(t_k) = \sigma_{V_1}(t_k) = T_L(t_k) \leq 0 \quad (\text{B.32})$$

Pour $k = 0$, on a $q_d(t_0^+) \neq q_d(t_0^-)$. Calculons un majorant pour $\sigma_{\|\tilde{q}\|^2}(t_0)$. On a :

$$\sigma_{\|\tilde{q}\|^2}(t_0) = \|\tilde{q}_1(t_0^+)\|^2 + \|\tilde{q}_2(t_0^+)\|^2 - \|\tilde{q}_1(t_0^-)\|^2 - \|\tilde{q}_2(t_0^-)\|^2 \quad (\text{B.33})$$

Comme $q_{2d}(t_0^-) = q_{2d}(t_0^+)$, $q_{1d}(t_0^+) = 0$ et $q_1(t_0) = 0$ on obtient :

$$\sigma_{\|\tilde{q}\|^2}(t_0) = -\|q_{1d}(t_0^-)\|^2 \leq 0 \quad (\text{B.34})$$

Des équations (B.31), (B.32), (B.34) et de l'inégalité (B.20) on déduit que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{V_2}(t_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{V_1}(t_k) \leq KV_2^{\frac{3}{4}} (\tau_0^{k_{cyc}}) \quad (\text{B.35})$$

La condition **(d)** de la proposition 2 est donc satisfaite. Le système (4.1) bouclé avec le contrôleur (5.47) satisfait à toutes les conditions de la proposition 2**(ii)**. Par conséquent il est pratiquement faiblement stable sur Ω avec $x(\cdot) = [s(\cdot), \tilde{q}(\cdot)]$. ■

Annexe C

Problème Linéaire de Complémentarité

Un LCP (**L**inear **C**omplementarity **P**roblem) est un système de la forme [Murty, 1997]:

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ A\lambda + b \geq 0 \\ \lambda^T(A\lambda + b) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

qui peut se réécrire sous la forme plus compacte

$$0 \leq \lambda \perp A\lambda + b \geq 0 \quad (\text{C.2})$$

Un tel LCP possède une solution unique pour tout b , si et seulement si A est une P-matrice (les matrices symétriques définies positives sont des P-matrices [Murty, 1997, Chap. 1, p.18]).

■

Annexe D

Commande par la passivité (passivity based control)

Les deux commandes que nous avons utilisées sont basées sur la passivité. Après quelques définitions et théorèmes nous allons voir dans cette annexe, comment on peut mettre le système (4.1) avec les commandes (5.1) ou (5.47) sous la forme de blocs passifs, et quelles conclusions on peut en tirer sur la stabilité de la boucle fermée, ainsi que sur la fonction de Lyapunov à utiliser pour l'analyse de ces lois.

Pour plus de détails sur la passivité, je vous renvoie à l'ouvrage suivant [Lozano *et al.*, 2000], d'où sont tirés la plupart des résultats de cette annexe.

D.1 Généralités

D.1.1 Définition de la passivité

Définition 9 *Un système avec une entrée u et une sortie y où $u(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$ est passif si il existe une constante $\beta(X(0))$ telle que*

$$\int_0^T y^T(t)u(t)dt \geq \beta(X(0)) \quad (\text{D.1})$$

pour toutes fonctions u et tout $T \geq 0$. Si, en plus, il existe les constantes $\delta \geq 0$ et $\epsilon \geq 0$ telles que

$$\int_0^T y^T(t)u(t)dt \geq \beta(X(0)) + \delta \int_0^T u^T(t)u(t)dt + \epsilon \int_0^T y^T(t)y(t)dt \quad (\text{D.2})$$

pour toutes fonctions u et tout $T \geq 0$, alors le système est strictement passif en entrée si $\delta > 0$, strictement passif en sortie si $\epsilon > 0$, et strictement passif si $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$. ■

D.1.2 Fonction de stockage

Théorème 1 *Supposons qu'il existe une fonction continue $V(t) \geq 0$ telle que*

$$V(T) - V(0) \leq \int_0^T y^T(t)u(t)dt \quad (\text{D.3})$$

pour toutes fonctions u , tout $T \geq 0$ et tout $V(0)$. Alors le système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est passif. Supposons en plus, qu'il existe deux constantes $\delta \geq 0$ et $\epsilon \geq 0$ telles que

$$V(T) - V(0) \leq \int_0^T y^T(t)u(t)dt - \delta \int_0^T u^T(t)u(t)dt - \epsilon \int_0^T y^T(t)y(t)dt \quad (\text{D.4})$$

pour toutes fonctions u , tout $T \geq 0$ et tout $V(0)$. Alors le système est strictement passif en entrée si $\delta > 0$, strictement passif en sortie si $\epsilon > 0$, et strictement passif si $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$. ■

On appelle "fonction de stockage" du système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$, la fonction $V(t)$ du théorème 1.

Interprétation énergétique

Si on considère que $V(t)$ correspond à l'énergie du système, que $\int_0^T y^T u dt$ correspond à l'énergie injectée dans le système par la commande sur $[0, T]$, alors l'équation (D.3) caractérise le fait que pour un système passif, l'énergie au temps T est inférieure à l'énergie initiale plus l'énergie fournie par la commande. Ceci définit les systèmes dissipatifs.

D.1.3 Théorème de la passivité

Théorème 2 (Théorème de la passivité) *Supposons que deux systèmes H_1 et H_2 (respectivement d'entrées u_1 et u_2 , de sorties y_1 et y_2) sont pseudo-strictement passifs, i.e.*

$$\begin{aligned} \int_0^T y_1^T u_1 dt + \beta_1 &\geq \delta_1 \int_0^T u_1^T u_1 dt + \epsilon_1 \int_0^T y_1^T y_1 dt \\ \int_0^T y_2^T u_2 dt + \beta_2 &\geq \delta_2 \int_0^T u_2^T u_2 dt + \epsilon_2 \int_0^T y_2^T y_2 dt \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$\text{avec } \delta_1 + \epsilon_1 \geq 0 \text{ et } \delta_2 + \epsilon_2 \geq 0$$

Le système H_1 - H_2 en boucle fermée (voir figure D.1) est stable à gains finis si : $\delta_1 \geq 0$, $\epsilon_2 \geq 0$ et $\epsilon_1 + \delta_2 > 0$,

avec ϵ_1 ou δ_2 possiblement négatif.

Corollaire 1 *Le système en boucle fermée de la figure D.1 est stable à gains finis si :*

- 1- H_1 est passif et H_2 est strictement passif en entrée. i.e. $\epsilon_1 \geq 0$, $\epsilon_2 \geq 0$, $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 > 0$.
- 2- H_1 est strictement passif en sortie et H_2 est passif. i.e. $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 \geq 0$, $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$.

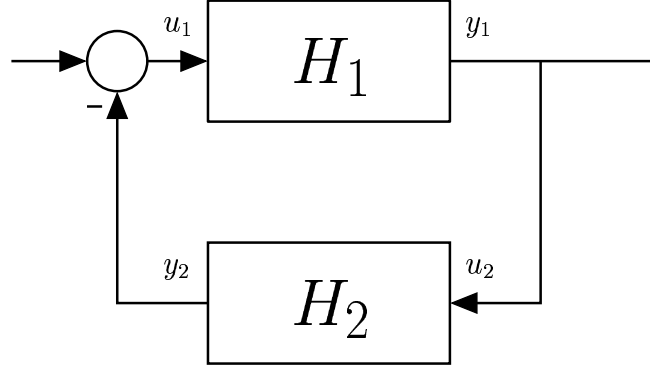


FIG. D.1 – Les deux systèmes H_1 et H_2 en boucle fermée

D.2 Loi de Paden et Panja

Revenons maintenant au cas de la loi de Paden-Panja. En boucle fermée la dynamique est la suivante (voir l'équation (5.4) en page 47)) :

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + \gamma_1\tilde{q} + \gamma_2\dot{\tilde{q}} = 0 \quad (\text{D.6})$$

Découpons la dynamique (D.6) en deux sous-systèmes :

$$H_1 \begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} = u_1 \\ y_1 = \dot{q} \end{cases}, \quad H_2 \begin{cases} \dot{z}_1 = u_2 = \dot{q} \\ y_2 = \gamma_2 u_2 + \gamma_1 z_1 \\ z_1(0) = \tilde{q}(0) \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

Vérifions la passivité de H_1 :

$$\begin{aligned} \int_0^T y_1^T(t)u_1(t)dt &= \int_0^T \dot{q}^T [M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + (\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q,\dot{q}))\dot{q}]dt \\ &= \int_0^T [\dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q}]dt \\ &= \frac{1}{2}[\dot{q}^T M(q)\dot{q}]_0^T \\ &= V_1(T) - V_1(0) \geq \underbrace{-\frac{1}{2}\dot{q}(0)^T M(q(0))\dot{q}(0)}_{\beta_1} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

avec $V_1(t) = \frac{1}{2}\dot{q}(t)^T M(q(t))\dot{q}(t)$. D'après la définition 9, le système H_1 est passif. Et d'après le théorème 1, la fonction $V_1(t)$ est une fonction de stockage pour le système H_1 .

Vérifions la passivité de H_2 :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T y_2^T(t) u_2(t) dt &= \int_0^T [\gamma_2 u_2 + \gamma_1 \tilde{q}]^T u_2 dt \\
 &= \gamma_2 \int_0^T u_2^T u_2 dt + \gamma_1 \int_0^T \dot{\tilde{q}}^T \tilde{q} dt \\
 &= \gamma_2 \int_0^T u_2^T u_2 dt + \frac{\gamma_1}{2} [\tilde{q}^T \tilde{q}]_0^T \\
 &= \gamma_2 \int_0^T u_2^T u_2 dt + V_2(T) - V_2(0) \\
 &\geq \underbrace{\gamma_2}_{\delta_2} \int_0^T u_2^T u_2 dt - \underbrace{\frac{\gamma_1}{2} [\tilde{q}(0)^T \tilde{q}(0)]}_{\beta_2}
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

avec $V_2(t) = \frac{\gamma_1}{2} \tilde{q}(t)^T \tilde{q}(t)$. D'après la définition 9, le système H_2 est strictement passif en entrée. Et d'après le théorème 1, la fonction $V_2(t)$ est une fonction de stockage pour le système H_2 .

On boucle les deux sous-systèmes H_1 et H_2 tels que (voir figure D.2)

$$\begin{cases} u_1 = -y_2 \\ u_2 = y_1 \end{cases}, \tag{D.10}$$

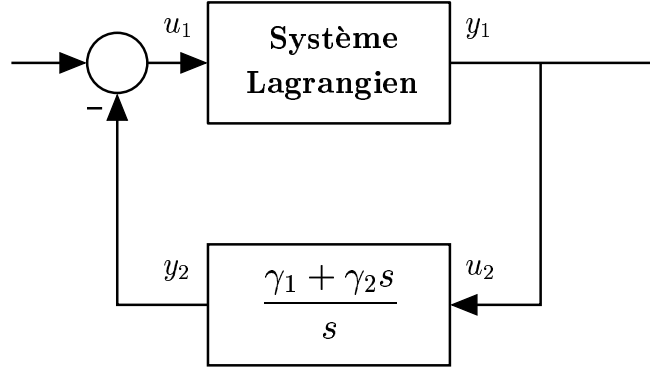


FIG. D.2 – Contrôleur de Padén et Panja

Puisque H_1 est passif, et que H_2 est strictement passif en entrée, d'après le corollaire 1 la boucle fermée est stable. De plus la somme des deux fonctions de stockage V_1 et V_2 est une fonction de Lyapunov de notre système.

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}(t)^T M(q(t)) \dot{\tilde{q}}(t) + \frac{\gamma_1}{2} \tilde{q}(t)^T \tilde{q}(t) \tag{D.11}$$

On retrouve la fonction de Lyapunov utilisée page 46.

D.3 Loi de Slotine et Li

La dynamique de la boucle fermée du schéma de commande de [Slotine & Li, 1988] est la suivante (voir l'équation (B.3) en page 111).

$$\begin{cases} M(q)\dot{s}(t) + C(q,\dot{q})s(t) = -\gamma_1 s(t) \\ \dot{\tilde{q}} = -\gamma_2 \tilde{q} + s \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

Découpons la dynamique (D.12) en deux sous-systèmes :

$$H_1 \begin{cases} u_1 = M(q)\dot{s} + C(q,\dot{q})s = -\gamma_1 s(t) \\ y_1 = s \end{cases}, \quad H_2 \begin{cases} \dot{z}_1 = -\gamma_2 z_1 + u_2 \\ y_2 = \gamma_1 u_2 \\ z_1(0) = \tilde{q}(0) \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

Vérifions la passivité de H_1 :

On refait le même calcul qu'en (D.8), en prenant s en lieu est place de $\dot{\tilde{q}}$. On en déduit que H_1 est passif, et que $V_1(t) = \frac{1}{2}s(t)^T M(q(t))s(t)$ est une fonction de stockage pour H_1 .

Vérifions la passivité de H_2 :

$$\begin{aligned} \int_0^T y_2^T(t)u_2(t)dt &= \gamma_1 \int_0^T u_2^T u_2 dt \\ &= \frac{1}{\gamma_1} \int_0^T y_2^T y_2 dt \\ &= \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T u_2^T u_2 dt + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^T y_2^T y_2 dt \\ &\geq \underbrace{0}_{\beta_2} + \underbrace{\frac{\gamma_1}{2} \int_0^T u_2^T u_2 dt}_{\delta_2} + \underbrace{\frac{1}{2\gamma_1} \int_0^T y_2^T y_2 dt}_{\epsilon_2} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

D'après la définition 9, le système H_2 est strictement passif . On peut montrer (voir [Lozano *et al.*, 2000, section 6.2.5]) que la fonction $V_2(t) = \gamma_1 \gamma_2 z_1^T z_1$ est une fonction de stockage pour H_2 .

On boucle les deux sous-systèmes H_1 et H_2 tels que (voir la figure D.3)

$$\begin{cases} u_1 = -y_2 \\ u_2 = y_1 \end{cases}, \quad (\text{D.15})$$

Puisque H_1 est passif, et que H_2 est strictement passif (donc strictement passif en entrée), d'après le corollaire 1 la boucle fermée est stable. De plus la somme des deux fonctions de stockage V_1 et V_2 est une fonction de Lyapunov de notre système.

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = \frac{1}{2}s(t)^T M(q)s(t) + \gamma_2\gamma_1\tilde{q}(t)^T \tilde{q}(t) \quad (\text{D.16})$$

On retrouve la fonction de Lyapunov utilisée page 57.

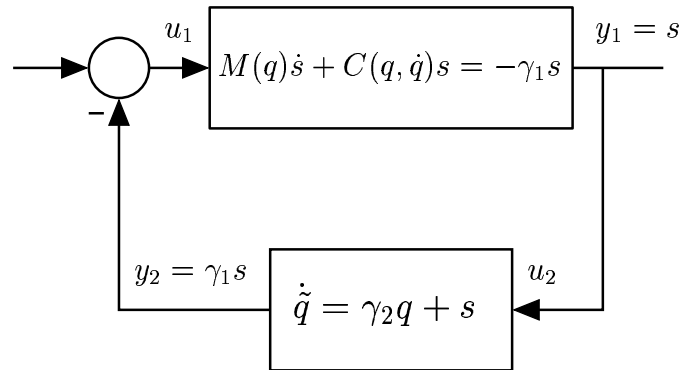


FIG. D.3 – Contrôleur de Slotine et Li



Contribution à la commande de systèmes mécaniques non-réguliers

Dans cette thèse nous étudions, d'une part, la poursuite de trajectoires pour des systèmes mécaniques soumis à des contraintes unilatérales sans frottement. L'analyse de stabilité prend en compte le caractère hybride et discontinu de la dynamique de ces systèmes. Les différences qu'il y a entre la poursuite de trajectoires pour des systèmes contraints ou non, sont expliquées en termes de trajectoires de références et de signaux de contrôles. Ce travail présente les conditions de stabilité des contrôleurs proposés. Il est montré que la conception des phases de transitions est un point clef dans l'analyse de stabilité. La robustesse de ces lois est étudiée sur quelques simulations numériques. Finalement nous présentons quelques extensions possibles de ce contrôleur aux impacts multiples.

La seconde partie de ce travail traite du double impact d'un bipède avec le sol. Nous déterminons quelles sont les conditions nécessaires pour avoir une marche en double support.

MOTS-CLÉS : CONTRAINTE UNILATÉRALE, IMPACT, HYBRIDE, STABILITÉ, BRAS MANIPULATEUR, BIPÈDE

Control of Nonsmooth Mechanical Systems

In the first part of this thesis, we study the tracking control of Lagrangian systems subject to frictionless unilateral constraints. The stability analysis incorporates the hybrid and nonsmooth dynamical feature of the overall system. The difference between tracking control for unconstrained systems and unilaterally constrained ones, is explained in terms of closed-loop desired trajectories and control signals. This work provides details on the conditions of existence of controllers which guarantee stability. It is shown that the design of a suitable transition phase desired trajectory, is a crucial step. Some simulation results provide informations on the robustness aspects. Finally the extension towards the case of multiple impacts is considered.

The second part of this work deals with the double impact of biped on the ground. We exhibit the necessary conditions to have a double support walk.

KEYWORDS : UNILATERAL CONSTRAINT, IMPACT, HYBRID, LYAPUNOV STABILITY, MANIPULATOR ARM, BIPED