

# POURSUITE DE TRAJECTOIRE POUR DES SYSTÈMES MÉCANIQUES LAGRANGIENS SOUMIS À DES CONTRAINTES UNILATÉRALES.

Jean-Matthieu Bourgeot et Bernard Brogliato

INRIA Rhône-Alpes, 655 avenue de l'Europe  
38330 Montbonnot, France

Jean-Matthieu.bourgeot@inrialpes.fr

**Résumé** - Dans ce papier nous étudions la poursuite de trajectoire pour des systèmes mécaniques Lagrangiens soumis à des contraintes unilatérales sans frottements. L'analyse de la stabilité de tels systèmes doit prendre en compte le caractère hybride (ou non-régulier) de la dynamique du système complet. Les différences entre la poursuite de trajectoire pour un système non-contraint et un système soumis à une contrainte unilatérale sont expliquées en termes de trajectoires invariantes et de trajectoires désirées. Ces travaux donnent des détails sur les conditions d'existence de loi de commande asymptotiquement stable.

**Mots clé** - Contraintes unilatérales, mécanique non régulière.

## 1 Introduction

Dans ce papier nous étudions la poursuite de trajectoire pour des systèmes mécaniques Lagrangiens soumis à des contraintes unilatérales sans frottements. Ces systèmes peuvent évoluer suivant trois types de mouvements : **i**) une phase de déplacement libre, **ii**) une phase complètement contrainte, **iii**) une phase de transition qui permet de stabiliser le système sur une surface. En partant des résultats de [3] [4] nous précisons les conditions sous lesquelles la stabilité est assurée.

Par exemple le cas d'un système à  $n$  degrés de liberté ( $n \geq 2$ ) est résolu dans [3] seulement si une certaine matrice est Jacobienne, ce qui est restrictif comme on peut le voir dans les exemples de [2, §8.6]. Dans [4] l'existence d'une trajectoire spécifique pour la phase de transition est supposée, sans être prouvée. Ces deux points sont abordés dans ce papier.

### 1.1 Dynamique

Soit  $X \in \mathbb{R}^n$  le vecteur de coordonnées généralisées. Les systèmes étudiés dans ce papier sont des systèmes Lagrangiens contraints unilatéralement, avec une fonction Lagrangienne  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{X}^T M(X)\dot{X} - U(X) - \Psi_\Phi(X)$ , ou  $T(X, \dot{X}) = \frac{1}{2}\dot{X}^T M(X)\dot{X}$  représente l'énergie cinétique,  $U(X)$  représente l'énergie potentielle, et  $\Psi_\Phi(X)$  tient compte des contraintes unilatérales, i.e.  $\Psi_\Phi(q) = \begin{cases} 0 & \text{if } q \in \Phi \\ +\infty & \text{if } q \notin \Phi \end{cases}$ , cette fonction est un potentiel non-régulier associé aux contraintes unilatérales. La dynamique du système peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} M(X)\ddot{X} + C(X, \dot{X})\dot{X} + G(X) = u + \nabla F(X)\lambda_X \\ F(X) \geq 0, \quad F(X)^T \lambda_X = 0, \quad \lambda_X \geq 0 \\ \text{Loi de choc} \end{cases} \quad (1)$$

où  $M(X) = M^T(X) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice d'inertie,  $F(X) \in \mathbb{R}^m$  représente la distance entre le

système et la surface de la contrainte,  $\lambda_X \in \mathbb{R}^m$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte,  $u \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur généralisé de la commande,  $C(X, \dot{X})$  représente la matrice des effets de Coriolis et centripètes,  $G(X)$  contient les force conservatives.  $\nabla$  représente le gradient. Les instants d'impact seront notés dans la suite par  $t_k$ . Le domaine admissible  $\Phi$  est le domaine fermé de l'espace de configuration dans lequel le système peut évoluer ( $\Phi = \{X | F(X) \geq 0\}$ ). Le bord de  $\Phi$  est noté  $\partial\Phi$ . Une loi de choc est nécessaire pour intégrer le système (1) et pour rendre le domaine  $\Phi$  invariant. Une loi de restitution est une relation entre les vitesses après l'impact et les vitesses avant l'impact. Pour ce travail nous choisissons la loi de [6] :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t_k^+) = & -e_n \dot{X}(t_k^-) + (1 + e_n) \arg \min_{z \in T_\Phi(X(t_k))} \\ & \frac{1}{2} [z - \dot{X}(t_k^-)]^T M(X(t_k)) [z - \dot{X}(t_k^-)] \end{aligned} \quad (2)$$

Où  $\dot{X}(t_k^+)$  représente la vitesse post-impact,  $\dot{X}(t_k^-)$  la vitesse pré-impact,  $T_\Phi(X(t))$  le cône tangent de  $\Phi$  au point  $X(t)$  et  $e_n$  est le coefficient de restitution,  $e_n \in [0, 1]$ .

La loi de restitution dans (2) implique une perte d'énergie cinétique à chaque impact, cette perte est donnée par :

$$\begin{aligned} T_L(t_k) = & -\frac{1}{2} \frac{1-e_n}{1+e_n} \left[ \dot{X}(t_k^+) - \dot{X}(t_k^-) \right]^T M(q(t_k)) \\ & \left[ \dot{X}(t_k^+) - \dot{X}(t_k^-) \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

### 1.2 Tâche cyclique

Dans ce papier nous nous limitons à l'étude de tâches cycliques composées d'une succession de mouvements

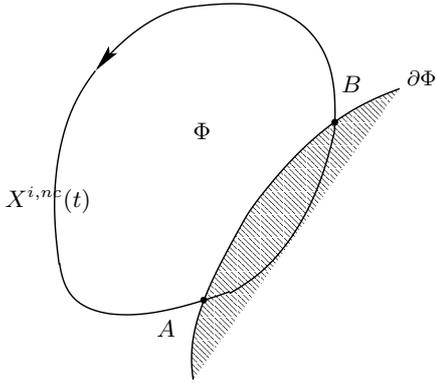


Figure 1: Trajectoire non contrainte.

libres avec des mouvements complètement contraints (phases  $\Omega_k$ ). Pendant la transition entre la phase libre et la phase complètement contrainte, la dynamique du système passe par une phase de transition  $I_k$ . La transition phase contrainte-phase libre est quant à elle instantanée (il suffit que l'accélération  $\frac{d^2}{dt^2}(F(X(t)))$  soit positive pour qu'il y ait décollage). Dans le domaine temporel nous pouvons représenter une tâche cyclique par la décomposition suivante :

$$\mathbb{R}^+ = \underbrace{\Omega_0 \cup I_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I_1 \cup \dots \cup \Omega_{2k} \cup I_k \cup \Omega_{2k+1} \cup \dots}_{\text{cycle 0}} \quad \underbrace{\dots}_{\text{cycle k}} \quad (4)$$

où  $\Omega_{2k}$  représente l'intervalle de temps associé au mouvement libre et  $\Omega_{2k+1}$  pour les phases contraintes.

Les points **i)** et **ii)** de l'introduction impliquent que la trajectoire invariante (noté  $X^{i,nc}(\cdot)$ ) est de la forme indiquée sur la figure 1. Il est clair que pour avoir une phase contrainte il faut avoir  $F(X^{i,nc}(t)) < 0$  pour  $t \in \Omega_{2k+1}$ , autrement nous n'aurions pas de force de contact lorsque le système suit parfaitement la trajectoire de référence. En conséquence il existe un point  $A$  dans l'espace de configuration, tel que  $X^{i,nc}(\cdot)$  est transversale à  $\partial\Phi$  en  $A$ . Ce point est le début de la phase de transition. **La gestion de cette phase de transition est le point clef du problème traité dans ce travail.** Une première idée serait d'imposer un contact tangentiel, i.e. avec  $\nabla F(X_d^*)^T \dot{X}_d^* = 0$ , où  $X_d^*(\cdot)$  est le signal de référence utilisé dans la loi de commande ( les différences entre  $X_d^*(\cdot)$ , et  $X^{i,nc}(\cdot)$  seront expliquées plus loin). Mais :

- $\alpha)$  A cause des erreurs initiales  $X(0) - X_d^*(0) \neq 0$ , et  $\dot{X}(0) - \dot{X}_d^*(0) \neq 0$ , des impacts peuvent quand même se produire.
- $\beta)$  Ce n'est pas une stratégie de commande robuste puisque une mauvaise estimation de la position de la contrainte peut faire que le système ne se stabilise pas du tout sur la surface  $\partial\Phi$ . C'est pour cela qu'il est préférable d'utiliser une stratégie qui impose des collisions avec  $\partial\Phi$ .
- $\gamma)$  Dans tous les cas, les impacts doivent être inclus dans l'analyse de stabilité.

- $\delta)$  La meilleure stratégie pour une stabilisation sur  $\partial\Phi$  est de recréer une dynamique en boucle fermée qui copie la dynamique d'une balle qui rebondit par terre  $\ddot{X} = -g, X \geq 0$ . Ceci est très robuste vis-à-vis des incertitudes sur la position de la contrainte.

Nous verrons dans la section suivante que le type de stabilité que nous recherchons est basé sur l'utilisation d'une même fonction de Lyapunov  $V(X, \dot{X}, t)$  pour les différentes phases. Ceci entraîne quelques difficultés dues aux points suivants :

- **a)** Il y a des couplages non-nuls entre les coordonnées "tangentielles" et "normales", la matrice d'inertie  $M(X)$  n'étant pas diagonale par blocs dans les coordonnées appropriées.
- **b)** La fonction  $V(X, \dot{X}, t)$  doit être unique pour toutes les phases, i.e. pour  $\Omega_{2k}$  (ODE),  $\Omega_{2k+1}$  (DAE), et pour  $I_k$  (MDE).
- **c)** Si  $V \equiv 0$  alors un saut dans les vitesses  $\dot{q}(t_k^+) \neq \dot{q}(t_k^-)$  implique un saut positif  $V(t_k^+) - V(t_k^-) > 0$  dans la fonction de Lyapunov. Cela veut dire que des impacts vont généralement exclure toute convergence asymptotique.
- **d)** La fonction  $V$  doit satisfaire  $V = 0$  lorsque la trajectoire invariante du système en boucle fermée est parfaitement suivie. Ceci implique que l'invariant du système contraint doit être utilisé dans la définition de  $V$ .

Ce problème de poursuite de trajectoire est donc sujet à de nombreuses contraintes. Le contrôleur que nous proposerons devra satisfaire les points énoncés précédemment, or certains d'entre eux sont parfois antagonistes (par exemple les points  $\beta)$  et  $c)$ ). En effet le point **c)** nous empêche d'avoir un contrôleur qui provoque encore des collisions lorsque le temps tend vers l'infini.

Pour clarifier les points précédents nous allons étudier un système à un degré de liberté :

$$\begin{cases} (\ddot{X} - \ddot{X}_d^*) + \gamma_2(\dot{X} - \dot{X}_d^*) + \gamma_1(X - X_d^*) = \lambda \\ 0 \leq X \perp \lambda \geq 0 \\ \dot{X}(t_k^+) = -e_n \dot{X}(t_k^-) \end{cases} \quad (5)$$

où  $X_d^*(\cdot)$  est une fonction deux fois dérivable,  $\gamma_2 > 0$ ,  $\gamma_1 > 0$ . Le symbole " $\perp$ " signifie que  $X$  et  $\lambda$  sont orthogonal, i.e.  $X\lambda = 0$ . Il est clair que  $X^{i,nc} \equiv X_d^*$ . Si  $X_d^*(t) < 0$  sur une portion de  $I$ , alors la trajectoire invariante du système contraint ne peut pas être  $X_d^*(\cdot)$ , puisque  $X_d^*(\cdot) < 0$  n'est pas atteignable. Dans ce cas, la trajectoire invariante sera simplement 0 sur  $I$ . Le point **d)** implique que la fonction  $V$  utilisée dans l'analyse de stabilité (i.e. une fonction quadratique de l'erreur de poursuite) doit être nulle sur  $\Omega_{2k+1}$  (phases complètement contraintes). Par conséquent la fonction de Lyapunov devra être choisi tel que sur  $I_k$  et sur

$\Omega_{2k+1}$  on ait  $V(X, \dot{X}, t) = 0$ , puisque la trajectoire invariante est zero sur ces phases (même lors des phases de rebonds). On en conclut que l'erreur de poursuite  $\tilde{X}(\cdot)$  utilisée dans  $V(\cdot)$  doit satisfaire  $\tilde{X}(\cdot) = 0$  pour que  $V(\tilde{X} = 0, \dot{\tilde{X}} = 0) = 0$ . Donc  $\tilde{X}(\cdot)$  ne peut pas être défini à partir de  $X_d^*(\cdot)$  ni de  $X^{i,nc}$  mais à partir d'un troisième signal que nous noterons  $X_d(\cdot)$ .

Clarifions encore une fois la différence entre  $X_d^*(\cdot)$  et  $X_d(\cdot)$ . Prenons  $X_d^* < 0$  constant dans (5). Nous avons donc  $X^{i,nc} = X_d^*$ , par contre le point fixe du système contraint est  $(X, \dot{X}) = (0, 0)$ , et nous devons avoir  $V(X = 0, \dot{X} = 0) = 0$ . En conséquence nous devons définir  $X_d = 0$  pendant la phase de stabilisation. Dans ce qui suit nous noterons  $\tilde{X} = X - X_d$  et  $\tilde{X} = X - X_d^*$ . Enfin en général nous avons  $X^{i,nc} \neq X_d^*$  car  $X^{i,nc}$  est l'invariant du système non contraint, par contre  $X_d^*$  peut devoir évoluer d'une phase de transition  $I_k$  à l'autre  $I_{k+1}$ .

La stratégie de commande que nous développerons par la suite prend en compte toutes ces contraintes, et en particulier elle impose bien une trajectoire invariante  $X^{i,nc}$  tel que décrite sur la figure 2 :

Pour la trajectoire invariante  $X^{i,nc}$  le contact se fait de façon tangentiel en  $A''$ , à cet instant le contrôle en force débute, ce qui explique le saut de  $X^{i,nc}$  entre  $A''$  et  $B$ .

Pour tenir compte du point  $\beta$ ) et imposer au système une dynamique proche de celle d'une balle qui rebondit par terre il faut que  $X_d^*(\cdot)$  puisse violer la contrainte pendant la phase de transition (entre les points  $A$  et  $B'$  de la figure 2), par contre  $X_d(\cdot)$  doit tendre vers la trajectoire de l'approche tangentielle après un nombre fini ou infini de cycles pour pouvoir satisfaire les points **c**) et **d**). Entre les points  $B$  et  $C$  la phase  $\Omega_{2k+1}$  se déroule ce qui remplit l'objectif du point **ii**). La trajectoire en pointillée entre  $AA'B'$  de la figure 2 représente  $X_d^*(\cdot)$  pendant la phase de transition avec impacts. Le système se stabilise sur  $\partial\Phi$  entre les points  $A$  et  $B'$  puis le contrôleur commute sur un contrôle en force, c'est pourquoi  $X^{i,nc}(\cdot)$  et  $X_d^*(\cdot)$  peuvent sauter en  $B$ . Dans le schéma de commande proposé plus tard, le point  $B'$  va converger (en un nombre fini ou infini de cycles) vers  $A''$ . Ceux qui nous permet de définir la trajectoire invariante du système contraint en boucle fermé comme étant la courbe  $(CAA''C)$  noté  $X^{i,c}(\cdot)$ . Cette trajectoire est sans impact.

Supposons que le but soit d'obtenir la poursuite asymptotique d'une trajectoire périodique. Sur la figure 2 seules les orbites de  $X^{i,nc}(\cdot)$  (i.e.  $AA''BCA$ ) et  $X^{i,c}(\cdot)$  (i.e.  $AA''CA$ ) sont fixées. Les deux autres orbites peuvent varier d'un cycle  $\Omega_{2k} \cup I_k \cup \Omega_{2k+1}$  à l'autre. Sur une phase  $I_k$  le point fixe du système en boucle fermé est  $X_d \in \partial\Phi(A'A'')$  qui est différent de  $X_d^* \notin \Phi(A'B')$ . La courbe  $(AA'B')$  et le point  $A'$  changent d'un cycle  $\Omega_{2k} \cup I_k \cup \Omega_{2k+1}$  à l'autre  $\Omega_{2k+2} \cup I_{k+1} \cup \Omega_{2k+3}$ .

Pour résumer la stratégie de commande et l'analyse de stabilité va devoir utiliser quatre trajectoires différentes :  $X_d^*(\cdot)$  comme entrée pour la commande,

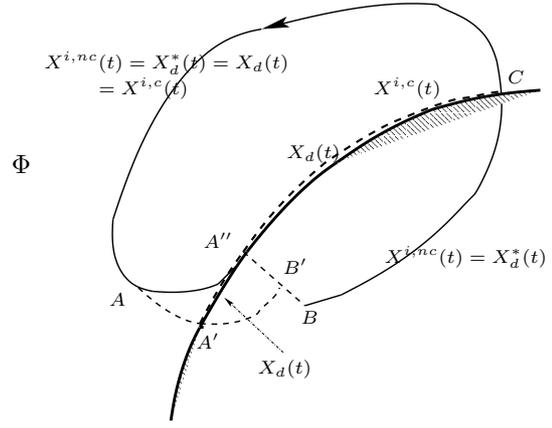


Figure 2: Les trajectoires invariantes du systèmes en boucle fermé.

$X_d(\cdot)$  pour la fonction de Lyapunov,  $X^{i,c}(\cdot)$  et  $X^{i,nc}(\cdot)$ . Toujours en se référant à la figure 2: lorsque le système est initialisé sur  $X^{i,c}(\cdot)$  entre  $C$  et  $A$  (i.e. sur  $\Omega_0$ ), si  $X(0) = X^{i,c}(0)$  et  $\dot{X}(0) = \dot{X}^{i,c}(0)$ , alors  $X_d(t) = X^{i,c}(t)$  sur  $(CA'')$  et  $X_d(t) \in \partial\Phi$  sur  $(A''C)$ . Par contre si initialement  $X(0) \neq X^{i,c}(0)$  et/ou  $\dot{X}(0) \neq \dot{X}^{i,c}(0)$ , alors  $X_d(t) \neq X^{i,c}(t)$  sur  $(AB')$  et  $X_d(t)$  est fixé à zero dans la fonction de Lyapunov à partir du premier impact. Nous voyons ici la principale différence par rapport au contrôle de systèmes non contraints pour lesquels les quatre trajectoires sont confondues, habituellement noté  $X_d(\cdot)$ .

## 2 Critère de Stabilité

Le critère de stabilité utilisé dans ce papier est une extension de la seconde méthode de Lyapunov. Cette extension adaptée aux systèmes mécaniques soumis à des contraintes unilatérales a été proposé dans [3] et [4]. Soit  $x(\cdot)$  l'état du système (1) en boucle fermée avec un contrôleur par retour d'état  $u(X, \dot{X}, t)$ .

**Définition 1 (Système faiblement  $\Omega$ -stable)** *Le système est faiblement  $\Omega$ -stable si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que  $\|x(0)\| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t)\| \leq \epsilon$  pour tout  $t \geq 0, t \in \Omega = \cup_{k \geq 0} \Omega_k$ . Si de plus  $x(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty, t \in \Omega$ , alors le système est asymptotiquement faiblement stable. Le système est pratiquement faiblement stable s'il existe une boule de rayon  $R > 0$  centrée en  $x = 0$ , et telle que  $x(t) \in B(0, R)$  pour tout  $t \geq T; T < +\infty, t \in \Omega, R < +\infty$ . ■*

Définissons l'application de Poincaré associée à la section  $\Sigma_{\mathcal{I}}^- = \{x | F_i(X) = 0, \dot{X}^T \nabla F_i(X) < 0, i \in \mathcal{I}\}$  où  $\mathcal{I}$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, m\}$  :

$$P_{\Sigma_{\mathcal{I}}} : \Sigma_{\mathcal{I}}^- \rightarrow \Sigma_{\mathcal{I}}^- \quad (6)$$

$$x_{\Sigma_{\mathcal{I}}}(k) \mapsto x_{\Sigma_{\mathcal{I}}}(k+1).$$

où  $x_{\Sigma_{\mathcal{T}}}$  est l'état de  $P_{\Sigma_{\mathcal{T}}}$ . Introduisons la fonction définie positive  $V(\cdot)$  qui servira à la suite de l'analyse. Soit  $V_{\Sigma_{\mathcal{T}}}$  la restriction de  $V$  sur  $\Sigma_{\mathcal{T}}$ .

**Définition 2 (Système fortement stable)** *Le système est dit fortement stable si : (i) il est faiblement  $\Omega$ -stable, (ii) sur les phases  $I_k$ ,  $P_{\Sigma_{\mathcal{T}}}$  est stable au sens de Lyapunov en utilisant la fonction  $V_{\Sigma_{\mathcal{T}}}$ , et (iii) la suite  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  possède un point d'accumulation en temps fini  $t_\infty < +\infty$ .* ■

Définissons la fonction de saut par  $\sigma_f(t) = f(t^+) - f(t^-)$  et  $\lambda[\cdot]$  comme étant la mesure de Lebesgue. Soit  $V(\cdot)$  qui satisfait  $V(x) \geq \alpha(\|x\|)$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(\cdot)$  strictement croissante. Soit  $I_k = [\tau_0^k, t_f^k]$ .

**Proposition 1 (Stabilité Faible [3])** *Supposons que la tâche est de la forme de (4), et que*

- (a) -  $\lambda[\Omega] = +\infty$ ,
- (b) - pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda[I_k] < +\infty$ ,
- (c) -  $V(x(t_f^k), t_f^k) \leq V(x(\tau_0^k), \tau_0^k)$ ,
- (d) -  $V(x(\cdot), \cdot)$  uniformément bornée sur toutes les phases  $I_k$ .

Si sur  $\Omega$ ,  $\dot{V}(x(t), t) \leq 0$  et  $\sigma_V(t_k) \leq 0$  pour tout  $k \geq 0$ , alors le système en boucle fermée est faiblement  $\Omega$ -stable. Si  $\dot{V}(x(t), t) \leq -\gamma(\|x(t)\|)$ ,  $\gamma(0) = 0$ ,  $\gamma(\cdot)$  strictement croissante, alors le système est asymptotiquement faiblement  $\Omega$ -stable. ■

**Proposition 2 (Stabilité Faible)** *Supposons que les points (a) and (b) de la proposition (1) soit satisfaits. Si :*

- (a) - A l'exterieur des phases  $I_k$ ,  $\dot{V}(t) = -\gamma V(t)$  pour un  $\gamma > 0$ ,
- (b) - pour les phases  $I_k$ ,  $V(t_{k+1}^-) - V(t_k^+) \leq 0$ ,
- (c) - le système est initialisé dans  $\Omega_0$  avec  $V(\tau_0^0) \leq 1$ ,
- (d) -  $|\sum_{k \geq 0} \sigma_V(t_k)| \leq KV^\kappa(\tau_0^k)$  pour un  $\kappa \geq 0$  et un  $K \geq 0$ .

Alors il existe une constante  $N < +\infty$  telle que  $\lambda[t_\infty^k, t_f^k] = N$ , pour tout  $k \geq 0$  (l'indice du cycle), et telle que :

- (i) - Si  $\kappa \geq 1$  et  $N = \frac{1}{\gamma} \ln(\frac{1+K}{\beta})$  pour un  $0 < \beta < 1$ , alors  $V(\tau_0^{k+1}) \leq \beta V(\tau_0^k)$ . Le système est asymptotiquement faiblement stable.
- (ii) - Si  $\kappa < 1$ , alors  $V(\tau_0^k) \leq \beta(\gamma)$ , où  $\beta(\gamma)$  peut être choisi arbitrairement faible en augmentant  $\gamma$ . Le système est pratiquement faiblement stable avec  $R = \alpha^{-1}(\beta(\gamma))$ . ■

**Preuve:** voir [1].

**Proposition 3 (Stabilité Forte [3])** *Le système est fortement stable si en plus des conditions de la proposition 1 nous avons :*

- $V(t_{k+1}^-) \leq V(t_k^-)$ ;
- $V$  uniformément bornée et continue sur  $I_k - \cup_k \{t_k\}$ .

■

## 3 Poursuite de trajectoire

### 3.1 Structure du contrôleur

Pour simplifier la conception et l'étude du contrôleur, les équations de la dynamique du système (1) sont considérées dans les coordonnées généralisées introduites par [5]. Après transformation dans le nouveau

système de coordonnées  $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ ,  $q_1 = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ \vdots \\ q_1^m \end{bmatrix}$ ,  $q = Q(X) \in \mathbb{R}^n$ , la dynamique du système est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{11}(q)\ddot{q}_1 + M_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_1(q, \dot{q})\dot{q} + g_1(q) = T_1(q)u + \lambda \\ M_{21}(q)\ddot{q}_1 + M_{22}(q)\ddot{q}_2 + C_2(q, \dot{q})\dot{q} + g_2(q) = T_2(q)u \\ q_1^i \geq 0, \quad q_1^i \lambda_i = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m \end{array} \right. \quad \text{Loi de chocs} \quad (7)$$

Avec  $M_{21}(q) = M_{12}^T(q) \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ ,  $M_{11}(q) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $M_{22}(q) \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ . Dans les nouvelles coordonnées  $q$ , nous avons  $\Phi = \{q | Cq \geq 0\}$ . Le cône tangent  $T_\Phi(q_1 = 0) = \{v | Cv \geq 0\}$  est l'espace des vitesses admissible à la frontière de  $\Phi$ .

Choisissons:

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{q}^T \tilde{q} + \Psi_\Phi(q) \quad (8)$$

Avec  $\tilde{q}(\cdot) = q(\cdot) - q_d(\cdot)$ , et  $\Psi_\Phi(q)$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $\Phi$  [6]. La loi de commande utilisée dans ce contrôleur est basée sur celle présenté dans [7], initialement prévue pour le contrôleur de mouvements non-contraints. Soit :

$$T(q)u = \left\{ \begin{array}{l} U_{nc} = M(q)\ddot{q}_d^* + C(q, \dot{q})\dot{q}_d^* + g(q) - \gamma_1(q - q_d^*) - \gamma_2(\dot{q} - \dot{q}_d^*) \\ U_t = U_{nc} \text{ avant le premier impact} \\ U_t = g(q) - \gamma_1 \tilde{q} - \gamma_2 \dot{\tilde{q}} \text{ après le premier impact} \\ U_c = U_{nc} - P_d + K_f(P_q - P_d) \end{array} \right. \quad (9)$$

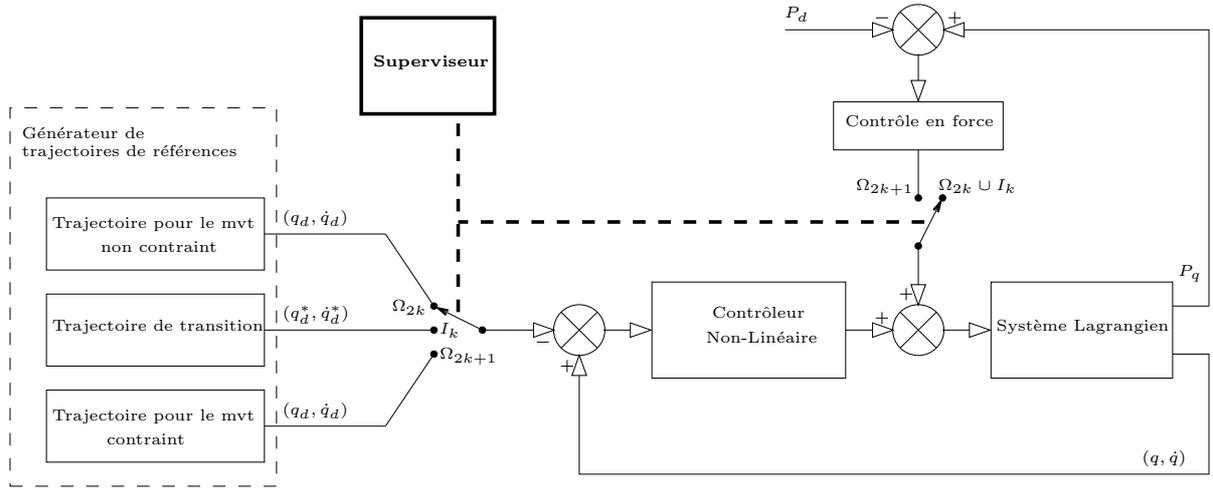


Figure 3: Schema bloc

où  $T(q) = \begin{pmatrix} T_1(q) \\ T_2(q) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$ ,  $K_f > 0$ ,  $P_d$  est la force souhaitée pour le mouvement complètement contraint. Les signaux  $q_d^*$ ,  $q_d$  et  $\bar{q}$  seront définis plus loin, tout comme les conditions de commutation entre les différents contrôleurs de (9). L'intérêt de ce choix de contrôleur est que la fonction  $V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$  dans (8) est très proche de l'énergie totale du système. Remarquons que le choix de  $u$  est indépendant du coefficient de restitution  $e_n$ . D'après (9) la troisième condition de la proposition 1 peut être remplacée par  $V(t_f^k) \leq V(t_0^-)$  puisque  $V(t_0^-) \leq V(\tau_0^k)$ .

### 3.2 Choix de la trajectoire de référence

Dans ce paragraphe nous définissons le signal de référence  $q_d^*(t)$  au cours de la phase de transition (voir la figure 4 pour  $q_{1d}^*(\cdot)$ , où  $A, A', B', B$  et  $C$  correspondent aux mêmes points que sur la figure 2):

Notons que les indices  $k$  pour les phases  $\Omega_k$  et  $I_k$  et pour les instants d'impact  $t_k$ , ne sont pas reliés. Définissons :

- $\tau_0^k$  est l'instant de début de la phase de transition (choisi par le concepteur),
- $t_0^k$  est l'instant correspondant à  $q_{1d}^*(t_0^k) = 0$ ,
- $t_0$  est le premier impact,
- $t_\infty$  correspond au point d'accumulation de la suite  $\{t_k\}_{k \geq 0}$ ,
- $t_f^k$  est la fin de la phase de transition,
- $\tau_1^k$  est tel que  $q_{1d}^*(\tau_1^k) = -\alpha V(\tau_0^k)$  et  $\dot{q}_{1d}^*(\tau_1^k) = 0$ <sup>(1)</sup>.
- $\Omega_{2k+1} = [t_f^k, t_d^k]$ .

Nous avons  $I_k = [\tau_0^k, t_f^k]$ ,  $\Omega_{2k+1} = [t_f^k, t_d^k]$ . Sur  $[\tau_0^k, t_0)$ , nous imposons que  $q_d^*(t)$  soit deux fois dérivable, et que  $q_{1d}^*(t)$  décroisse jusqu'à la valeur  $-\alpha V(\tau_0^k)$  sur  $[\tau_0^k, \tau_1^k]$ . Pour tenir compte du couplage entre  $q_1$  et  $q_2$  ( $M_{12} \neq 0$ ), le signal  $q_{2d}^*(t) \in C^2(\mathbb{R}^+)$  est gelé durant la phase de transition, i.e.:

- $q_{2d}^*(t) = q_{2d}^*$ ,  $\dot{q}_{2d}^*(t) = 0$  sur  $[\tau_0^k, t_\infty]$
- $q_{2d}^*(t)$  est défini sur  $[\tau_0^k, t_0^k]$  tel que  $\dot{q}_{2d}^*(t_0^k) = 0$ .

Sur  $(t_0, t_f]$ , nous définissons  $q_d$  et  $q_d^*$  comme cela :

$$q_d = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{2d}^* \end{pmatrix}, \quad q_d^* = \begin{pmatrix} -\alpha V(\tau_0^k) \\ q_{2d}^* \end{pmatrix} \quad (10)$$

Sur  $[t_f^k, t_d^k]$  nous fixons  $q_d = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{2d}(t) \end{pmatrix}$ . L'utilité de  $q_d^*$  est de créer une force de gravité "virtuelle" en direction de  $\partial\Phi$ , pour que le système puisse s'y stabiliser même si sa position est incertaine. En conséquence le point fixe  $(q_d, \dot{q}_d)$  du système contraint est utilisé dans l'expression de la fonction de Lyapunov ( $\tilde{q} = q - q_d$ ), alors que le point fixe non atteignable  $q_d^*$  est utilisé dans la loi de commande ( (9)  $\bar{q} = q - q_d^*$  avec  $q_d^*$  défini dans (10)). En relation avec la figure 2, nous avons que l'instant  $\tau_0^k$  correspond au point  $A$ ,  $t_\infty$  à  $B'$ ,  $t_0^k$  à  $A'$ ,  $t_d^k$  à  $C$ , et  $B$  à  $t_f^k$  (le terme  $-P_d - K_f P_d$  permet de définir le signal  $X_d^*(\cdot)$  entre les points  $B$  et  $C$  de la figure 2). Si  $V(\tau_0^k) = 0$  alors le point  $A''$  correspond à l'instant  $\tau_1^k$ .

L'arc de trajectoire  $AA'$  sur la figure 2 est normal à  $\partial\Phi$  (qui est le plan  $q_1 = 0$  de dimension  $m$  dans les coordonnées  $q$ ). La trajectoire invariante  $X^{i,c}(\cdot)$  en boucle fermée est définie par  $q^{i,c}(t) = q_d^*(t)$  sur  $\Omega_{2k}$ ,  $q^{i,c}(t) = q_d^*(t)$  avec  $\alpha = 0$  sur  $I_k$ , et  $q_1^{i,c}(t) = 0$  sur  $\Omega_{2k+1}$ ,  $q_2^{i,c}(t) = q_{2d}^*(t)$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Cette trajectoire est sans impact.

<sup>1</sup>Dans [2] [4] il était implicitement supposé dans les preuves de stabilité que  $\tau_1^k < t_0$ , cette restriction est enlevé dans ce papier.

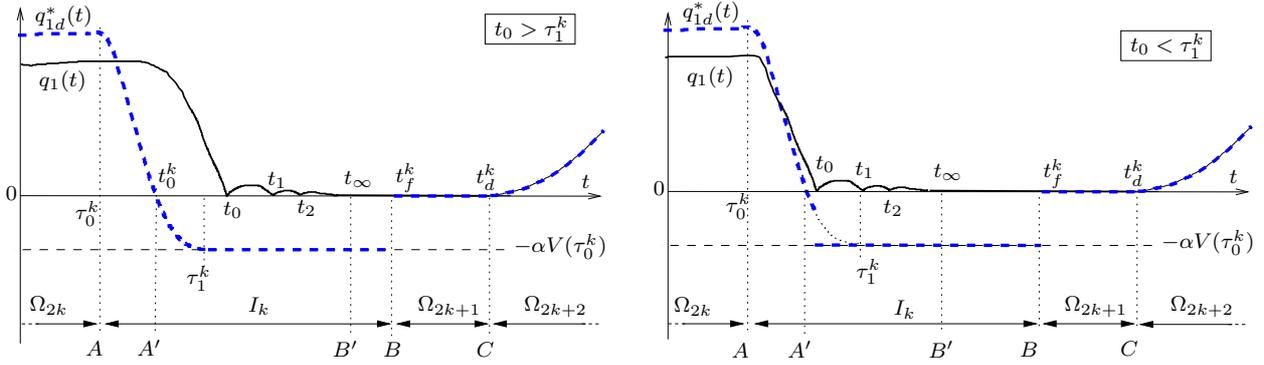


Figure 4: La trajectoire  $q_{1d}^*(t)$

### 3.3 Analyse de stabilité de la boucle fermée

L'état du système en boucle fermée peut être choisi comme étant  $x = (\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ , en accord avec la définition 1 qui concerne uniquement les phases  $\Omega_k$ .

**Définition 3**  $\{CI\}$  est le sous-espace des conditions initiales  $x(0)$  qui assurent que  $t_0 \geq \tau_1^k$  uniformément tout au long du mouvement dans (4). ■

A partir de maintenant considérons le cas où  $m = 1$ .

**Hypothèse 1** La loi de commande  $U_t$  de (9) assure que la suite  $\{t_k\}_{k \geq 0}$  des instant d'impact existe, et que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = t_\infty < +\infty$ . ■

Une des difficultés dans l'analyse de stabilité le long d'une trajectoire telle que (4), est de s'assurer que les erreurs de poursuite initiales ne s'accroissent pas d'un cycle  $\Omega_{2k} \cup I_k \cup \Omega_{2k+1}$  à l'autre à cause des collisions. Le point central de la stabilité de ces systèmes est la valeur du premier saut de  $V(\cdot)$ , i.e.  $\sigma_V(t_0)$ . Après calcul on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_V(t_k) = T_L(t_k) \leq 0, k \geq 1 \\ \sigma_V(t_0) = T_L(t_0) - \frac{1}{2}\gamma_1 q_{1d}^2(t_0^-) - \frac{1}{2}\dot{q}_{1d}(t_0^-)^T \\ \quad M\dot{q}_d(t_0^-) + M_{11}\dot{q}_1(t_0^-)\dot{q}_{1d}(t_0^-) \\ \quad + \dot{q}_2(t_0^-)^T M_{21}\dot{q}_{1d}(t_0^-) \end{cases} \quad (11)$$

Il est intéressant de constater que les égalités dans (11) sont indépendantes du choix de la loi de restitution. La seule hypothèse faite est que les impacts doivent dissiper de l'énergie cinétique.

**Le choix de  $q_d^*(\cdot)$  et de la stratégie de commutation entre  $U_{nc}$ ,  $U_c$  et  $U_t$ , est essentiellement fait afin de garantir  $\sigma_V(t_k) \leq 0$  pour  $k \geq 0$ .**

**Proposition 4** Supposons que l'hypothèse (1) soit satisfaite. Le système défini par (1) bouclé avec le contrôleur (9) et  $q_d(\cdot)$ ,  $q_d^*(\cdot)$  tel que défini dans le paragraphe 3.2, est :

(i) - Asymptotiquement fortement stable si  $x(0) \in \{CI\}$ .

(ii) - Asymptotiquement fortement stable si  $q_d^*(\cdot)$  est choisi tel que au moment du premier impact on ait  $[M_{11}\dot{q}_1(t_0^-) + \dot{q}_2(t_0^-)^T M_{21}]\dot{q}_{1d}^*(t_0^-) \leq 0$ .

(iii) - Asymptotiquement fortement stable si  $M_{12} = 0$  et  $e_n = 0$ .

(iv) - Asymptotiquement faiblement stable si  $M_{12} = 0$  et  $0 \leq e_n < 1$ . ■

**Preuve:** voir [1].

### 3.4 Perspectives

L'utilisation des résultats de la proposition 2 nécessite de choisir une loi de commande  $U_{nc}$  qui vérifie le point (a) de la proposition 2. Pour l'instant les commandes de Slotine et Li ou un retour d'état par linéarisation entrées/sorties peuvent être essayées. Le point crucial est de montrer le point (d) de la proposition 2.

## 4 Résultats de simulation

Cette stratégie de commande est testée en simulation sur un bras manipulateur à deux degrés de liberté pour le cas simple d'une seule contrainte scalaire. La surface de contact correspond au sol ( $y = 0$ ). Le changement de coordonnées correspondant à (7) est d'utiliser les coordonnées de l'espace de travail  $(x, y)$ . Soit :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, \quad y > 0$$

La figure 5 montre l'évolution de  $q_1(t)$  et de  $q_2(t)$  au cours d'une tâche cyclique de (4). La courbe de  $q_1$  montre la convergence asymptotique : les valeurs de  $\alpha V(\tau_0^k)$  décroissent de façon exponentielle. La courbe de  $q_2$  montre l'effet du couplage entre  $q_1$  et  $q_2$ . A chaque impact, il y a un saut dans  $\dot{q}_2$ . Le replat périodique sur  $q_{2d}$  correspond à la phase de transition durant laquelle  $q_{2d}$  est gelée.

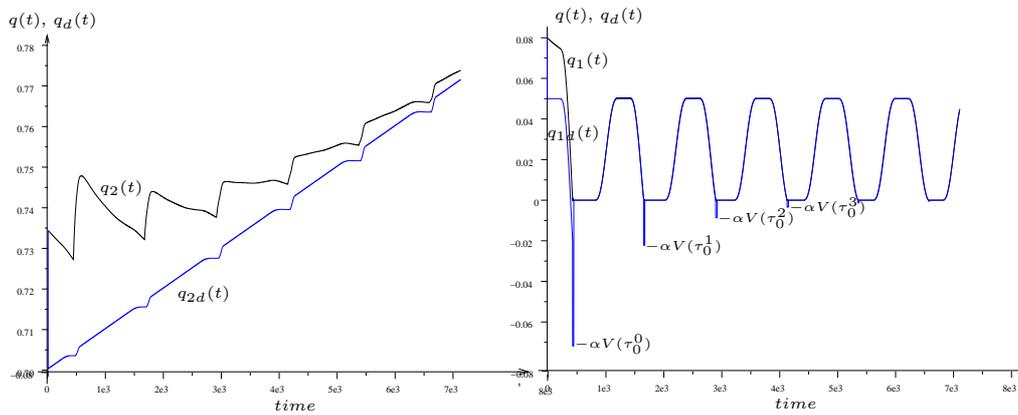


Figure 5: Convergence Asymptotique

## 5 Conclusion

Dans ce papier nous avons abordé le contrôle de système mécanique complètement actionnés soumis à des contraintes unilatérales sans frottements. Ces systèmes sont dits non régulier parce qu'ils sont discontinus au niveau des vitesses (à chaque instants d'impact), leurs accélérations et les forces de contact sont des mesures. L'extension des techniques de poursuite de trajectoire pour des systèmes non contraints aux systèmes non réguliers n'est pas immédiate. Le but de ce papier est d'étudier un contrôleur par retour d'état pour ce type de système, lorsqu'ils effectuent une tâche cyclique contenant des collisions.

## Références

- [1] J.M. Bourgeot and B. Brogliato. Tracking control of complementarity lagrangian systems. submitted to *the International Journal of Bifurcation and Chaos*, special issue on Non-smooth Dynamical Systems, 2003.
- [2] B. Brogliato. *Nonsmooth Mechanics*. Springer CCES, London, 2nd edition, 1999. Erratum and addenda available at <http://www.inrialpes.fr/bipop/people/brogliato/erratum.ps>.
- [3] B. Brogliato, S. Niculescu, and P. Orhant. On the control of finite dimensional mechanical systems with unilateral constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(2):200–215, February 1997.
- [4] B. Brogliato, S.I. Niculescu, and M.D.P Monteiro-Marques. On tracking control of a class of complementary-slackness mechanical systems. *Systems and Control Letters*, 39(4):255–266, March 2000.
- [5] N.H. McClamroch and D. Wang. Feedback stabilization and tracking of constrained robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(5):419–426, May 1988.
- [6] J.J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In *Nonsmooth Mechanics and Applications*, CISM Courses and Lectures no 302. Springer-Verlag, 1988.
- [7] B. Paden and R. Panja. Globally asymptotically stable pd+ controller for robot manipulators. *Int. J. Control*, 47:1697–1712, 1988.