INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

U.F.R INFORMATIQUE

N° attribué par la bibliothèque

|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Année 1998

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Discipline : INFORMATIQUE

présentée et soutenue publiquement
par

Frank GÉNOT

le 30 Janvier 1998

Titre :

Contributions à la modélisation et à la commande des systèmes mécaniques de corps rigides avec contraintes unilatérales

---

Directeurs de thèse **: MM. Bernard ESPIAU et Bernard BROGLIATO**

JURY

Mme Marie-Paule CANI GASCUEL	Présidente
M. Jean-Jacques MOREAU	Rapporteur
M. Michel SORINE	Rapporteur
M. Bernard BROGLIATO	Examinateur
M. Bernard ESPIAU	Examinateur

Avis aux concepteurs de bipèdes

Je me mis en route. Quelle allure. Raideur des membres inférieurs, comme si la nature m'avait refusé des genoux, écart extraordinaire des pieds de part et d'autre de l'axe de la marche. Le tronc, en revanche, comme par l'effet d'un mécanisme compensatoire, avait la mollesse d'un sac négligemment rempli de chiffes et se ballottait éperdument selon les imprévisibles saccades du bassin. J'ai souvent essayé de corriger ses défauts, de raidir le buste, de fléchir le genou et de ramener les pieds les uns vers les autres, car j'en avais au moins cinq ou six, mais cela finissait toujours de la même manière, je veux dire par une perte d'équilibre, suivie d'une chute. Il faut marcher sans penser à ce que l'on fait, comme on soupire, et moi quand je marchais sans penser à ce que je faisais, je marchais comme je viens de le dire, et quand je commençais à me surveiller je faisais quelques pas d'assez bonne facture et puis je tombais. J'ai pris donc le parti de me laisser aller. Ce port est dû, à mon avis, tout au moins en partie, à un certain penchant dont je n'ai jamais pu entièrement me délivrer et dont mes années impressionnables, celles qui président à la confection du caractère, ont naturellement fait les frais, je parle de la période qui s'étend, à perte de vue, entre les premiers trébuchements, derrière une chaise, et la classe de troisième, terme de mes humanités. J'avais donc la facheuse habitude, ayant compissé ma culotte, ou l'ayant conchiée, ce qui m'arrivait assez régulièrement au début de la matinée, vers dix heures dix heures et demie, de vouloir absolument continuer et achever ma journée, comme si de rien n'était. La seule idée de me changer, ou de me confier à maman qui ne demandait pourtant qu'à m'aider, m'était intolérable, je ne sais pourquoi, et jusqu'à mon coucher je me traînais, avec entre mes petites cuisses, ou plaqué à mes fesses, brûlant, croustillant et puant, le résultat de mes débordements. D'où ces mouvements précautionneux, raides et largement évasés des jambes et ce balancement désespéré du buste, destiné sans doute à donner le change, à faire croire que j'étais sans soucis, plein de gaîté, et à rendre vraisemblables mes explications au sujet de ma rigidité de base, que je mettais sur le compte de rhumatismes héréditaires.

Samuel Beckett, L'expulsé, 1946-1947, extrait

Remerciements

A l'issue de cette thèse, je tiens à remercier MM. Bernard Espiau et Bernard Brogliato, mes directeurs de thèses, pour m'avoir permis de mener à bien ce travail.
J'adresse mes sincères remerciements à M. Bernard Espiau, Directeur de Recherche à l'INRIA Rhône-Alpes, qui m'a permis d'effectuer cette thèse au sein du projet BIP dont il est l'initiateur. Il m'a sensibiliser avec beaucoup de pédagogie aux difficultés sous-jacentes à la synthèse de loi de commande pour les robots bipèdes. L'idée de s'inspirer de la marche humaine pour la recherche d'éventuels invariants dans l'optique d'élaborer des lois de commande *génératrices* de pattern de marche a donné lieu à de nombreuses discussions très enrichissantes. Cela a été aussi pour moi l'occasion de découvrir de nombreux outils en automatique non-linéaire comme l'approche par *fonction de tâche*. Merci encore pour la "souplesse" dont il a fait preuve lorsque mes travaux se sont orientés dans une direction a priori trop théorique pour pouvoir espérer en retirer directement les dividendes en vue d'applications pratiques à court terme sur le robot bipède réel.
M. Bernard Brogliato, Chargé de Recherche CNRS au Laboratoire d'Automatique de Grenoble, m'a permis de découvrir la spécificité mécanique des systèmes considérés, à savoir, le caractère unilatéral des contacts. Nos discussions régulières, initialement orientées sur la simulation de tels systèmes, se sont rapidement focalisées sur l'étude d'un système tout aussi synthétique que complexe : l'Exemple de Painlevé. Mes simulations m'ayant amené à constater que beaucoup de choses avaient été dites à tort sur cet exemple exhibé il y a plus de cent ans, je me suis attaché à essayer de trouver une démonstration de ce que j'observais, à savoir l'existence d'un nouveau coefficient critique de frottement. Je tiens à présenter ici l'expression de ma profonde gratitude à M. Benoit Thuilot, Maître de Conférence à l'Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, alors en stage postdoctoral dans l'équipe, pour son "acharnement" quotidien durant plus de deux semaines à contenir ma fougue en démontant de manière systèmatique mes démonstrations erronées. Fort de ce résultat, la rédaction avec M. Bernard Brogliato d'un état de l'art dédié aux systèmes avec contraintes unilatérales m'a permis de profiter non seulement de ses connaissances bibliographiques remarquables, mais aussi et surtout de ses qualités pédagogiques indéniables. Il m'a aussi permis de rencontrer et d'entamer des relations productives avec des sommités du domaine. Pour tout ceci, je tiens à lui adresser encore une fois

tous mes remerciements.
Merci aussi à M. Jean Della Dora, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, pour sa disponibilité et sa curiosité face à l'Exemple de Painlevé.
M. Michel Sorine, Directeur de Recherche à l'Inria Rocquencourt et M. Jean-Jacques Moreau, Professeur Emérite de l'Université de Montpellier II, ont bien voulu examiner mes travaux et en être les rapporteurs. Je leur exprime ma plus vive reconnaissance pour le profond intérêt qu'ils ont manifesté lors de la lecture du mémoire ainsi que pour leurs nombreux conseils sur de nouvelles pistes à explorer.
Je tiens aussi à remercier Mme Marie-Paule Cani Gascuel, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, pour avoir bien voulu accepter la présidence de mon jury.
Merci à M. Jean-Pierre Verjus, Directeur de l'Inria Rhône-Alpes de m'avoir hébergé pendant ces trois années et d'avoir mis à ma disposition les moyens nécessaires à la réalisation de mes travaux. Merci aussi à tous les permanents et thésards du projet Bip pour leur accueil chaleureux en dépit de la tournure théorique qu'a pris mon travail. Merci encore aux membres du projet is2 pour leur sympathie, leur soutien et l'intérêt qu'ils ont su montrer à mon sujet très éloigné de leurs thèmes de recherche.
Enfin je remercie tout particulièrement les personnes qui m'ont accompagné durant ces trois années et surtout Véronique.

Table des matières

Avant-propos **15**

I Mécanique des corps rigides avec contraintes unilatérales et frottement sec **21**

1 Introduction 22
2 Intégration de (Σ) : une présentation des contributions récentes 27
2.1 Contacts sans frottement 27
2.1.1 Mouvement continu 27
2.1.2 Impacts multiples 30
2.2 Contacts avec frottement d'Amontons-Coulomb 36
2.2.1 Mouvement continu 36
2.2.2 Impacts multiples 43
3 Résumé 45

II L'exemple de Painlevé **49**

1 Introduction 50
2 Présentation du modèle 51
3 Analyse préliminaire 54
3.1 Les zones d'inconsistance et d'indétermination 54
3.2 Représentation du cône de frottement dans l'espace de configuration 56
4 Discussion sur l'indétermination du mode $\mathcal{M}_4^+$ 60
5 Etude des transitions possibles à partir des modes $\mathcal{M}_1^+$ et $\mathcal{M}_4^-$ 64
5.1 Comportement des orbites au voisinage de $\theta = \theta_{c1}$ 64
5.2 Etude des points singuliers 67
5.2.1 Changement d'échelle de temps 68
5.2.2 Détermination de $\lim_{t\to t_{c1}^-} s(t)$ 68
5.2.3 Linéarisation locale du système (II.14) autour de P_{c1} 69
5.2.4 Etude de stabilité autour de P_{c1} 70
5.2.5 Détermination de $\lim_{t\to t_{c1}^-} \ddot{\theta}(t)$ 75

5.2.6 Extension au cas $\mu = \frac{4}{3}$ 80
5.2.7 Conclusions 80
6 Conclusions 84
6.1 Consistance du modèle 84
6.2 Indétermination 85
6.3 Impact sans collision 86
6.4 Aspects simulation 86
6.5 Perspectives 87

III Contrôle du non-glissement **89**
1 Introduction 90
2 Phase de support continu 90
3 Impact inélastique 95
4 Application à l'impact d'une jambe d'un bipendule 99
5 Conclusions 101

Conclusions et perspectives **107**

Bibliographie **109**

Annexe **117**

A Autre analyse du cas $\frac{4}{3} \leq \mu < \mu_C$ **117**

B Impacts sans collision **119**
1 Introduction 119
2 Solutions avec $\dot{x}_A(t_k^+) < 0$ 122
3 Solutions avec $\dot{x}_A(t_k^+) > 0$ 122
4 Solution imposant $\dot{x}_A(t_k^+) = 0$ 123

C Influence de la nature du contact sur l'existence d'inconsistance **125**
1 Introduction 125
2 Présentation du modèle 125
3 Valeur minimale du coefficient de frottement pour les inconsistances . 126

D Génération automatique des équations de la dynamique de Lagrange des robots rigides arborescents **129**
1 Motivation 129
2 Extension de la représentation DH aux chaînes arborescentes 131
3 Principe de la génération 134
3.1 Cinématique directe 134
3.2 Dynamique 135

3.3 Contraintes de non-pénétration dans le sol 137
4 Exemple d'utilisation du logiciel *Robotdyn* 138
4.1 Les fichiers d'entrée 138
4.2 Exemple de sortie 138
5 Conclusion 141

Table des figures

I.1 Mouvements et résultats des chocs possibles 31
I.2 Applications de collision 33
I.3 Le système des 3 balles 34

II.1 L'Exemple de Painlevé 51
II.2 Les modes du LCP pour $\mu = 1.4$ ($m = 1$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $l = 1$ m) . 57
II.3 L'évolution du cône de frottement généralisé pour $\mu = 1.6$ ($l = 1$ m, $m = 1$ kg) 59
II.4 Graphe de $\Re\left(L(\theta)\right)$, $\mu = 1.6$ 62
II.5 Visualisation des courbes caractéristiques pour P_{c1}^{+} en fonction du coefficient de frottement ($m = 1$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $l = 1$m) 70
II.6 Visualisation des courbes caractéristiques pour P_{c1}^{-} en fonction du coefficient de frottement ($m = 1$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $l = 1$m) 71
II.7 Visualisation des différents comportements autour de P_{c1}^{+} pour $\mu = 1.4 < \mu_C$ ($m = 1$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $l = 1$m) 78
II.8 Visualisation des différents comportements autour de P_{c1}^{+} pour $\mu = 1.6 > \mu_C$ ($m = 1$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $l = 1$m) 79

III.1 Modèle du robot bipède compas 99
III.2 Espace des solutions pour $\mu_0 = 0.2$ 102
III.3 Espace des solutions pour $\mu_0 = 0.4$ 102
III.4 Espace des solutions pour $\mu_0 = 0.6$ 103
III.5 Espace des solutions pour $\mu_0 = 0.8$ 103
III.6 Espace des solutions pour $\mu_0 = 1.0$ 104
III.7 Espace des solutions pour $\mu_0 = 1.2$ 104
III.8 Espace des solutions pour $\mu_0 = 1.4$ 105
III.9 Espace des solutions pour $\mu_0 = 1.6$ 105

C.1 L'exemple de Painlevé avec un bout rond 126
C.2 L'évolution de μ_{min} en fonction de l et r 128

D.1 Modèle du robot marcheur à 3 ddl 133

Liste des tableaux

I.1 Résultats de l'impact sur le système des 3 balles 35
II.1 Solutions du LCP 54
D.1 Variables déclarées en fin d'exécution 142

Avant-propos

La conception d'un robot marcheur comporte différentes étapes. La première étape technique (après les choix réalisés pour remplir le cahier des charges) est la modélisation. Le but de cette étape est l'obtention deux modèles : un premier modèle représentant la réalité de la manière la plus fidèle possible, un second obtenu après simplification du précédent, appelé modèle de commande. Le second modèle devra être suffisamment simple pour permettre de développer une stratégie de commande cohérente dont la robustesse sera éprouvée à terme sur le premier modèle.
Cette thèse se pose le problème de l'obtention d'un modèle complet. C'est un problème difficile de modélisation d'un système en interaction avec son environnement. Tous nos efforts vont porter sur la résolution de problèmes académiques permettant de débroussailler l'étude sur les robots marcheurs.

L'une des caractéristiques primaires de la marche (bipède ou multipède) réside dans l'alternance des appuis au sol : un cycle de la marche humaine est composé d'une *phase de simple appui*, durant laquelle la jambe libre est balancée vers l'avant pour venir prendre contact avec le sol, cette prise de contact donnant généralement lieu à un impact, suivie d'une *phase de double appui*, où les deux pieds sont en contact avec le sol, phase se terminant par le décollage de la jambe ayant précédemment servi d'appui. Du point de vue du mécanicien, le robot en phase de locomotion constitue un système mécanique de corps rigides soumis à des *contraintes unilatérales* traduisant la non-interpénétrabilité des corps supposés rigides sous forme d'inégalités, en présence de frottement sec. Il est a déplorer que peu de travaux sur les robots marcheurs soient basés sur une modélisation rigoureuse de la mécanique intrinsèque à de tels systèmes. Une explication peut résider dans le fait que la communauté des chercheurs dans le domaine des robots marcheurs est constituée essentiellement d'automaticiens/roboticiens, ayant pris l'habitude de modéliser le robot dans ses différentes phases d'appui par autant de modèles de manipulateurs. Ces modèles considèrent que le robot est rivé au sol, ce qui, en mécanique, correspond à l'introduction de *contraintes bilatérales* traduisant des extrémités fixes sous forme d'égalités.
A l'opposé, durant tout type de locomotion à pattes, aucun point du robot ne reste constamment lié au sol. Cela provient du caractère unilatéral des liaisons robot/sol,

tout point d'appui du robot avec le sol pouvant être amené à redécoller. Un autre défaut majeur de la formulation des contacts sous forme de contraintes bilatérales est qu'elle ne prend pas en compte de manière explicite le frottement suivant la tangente au contact : le point de contact étant supposé rivé au sol, tout glissement se retrouve donc intrinsèquement exclu. En conséquence la validité d'une loi de commande n'est généralement vérifiée qu'a posteriori, en rejouant la dynamique et en vérifiant que les forces d'interactions aux points de contact restent bien à l'intérieur des cônes de frottement associés. En commande optimale, que faire si la trajectoire optimale obtenue ne vérifie malheureusement pas le caractère unilatéral des contacts ? Remarquons enfin que la manière a priori naturelle pour décider du décollage d'un point dans le formulation bilatérale, basée sur la détection du changement de signe du multiplicateur de Lagrange associé, constitue une faute encore classiquement commise alors que Delassus [Delassus, 1917] avait déjà exhibé des contre-exemples de ce fait en 1917.

Aussi nous sommes-nous tournés vers des travaux plus généraux de la communauté des mécaniciens, basés sur une formulation unilatérale des contact. Notre étude nous a amené à regarder les robots marcheurs comme faisant partie de la classe des *systèmes hybrides* caractérisés par des dynamiques continues (correspondant aux phases durant lesquelles l'ensemble des points de contact reste invariant) ponctuées par des événements discrets, les impacts et les décollages. Comme le fait remarquer à juste titre Hurmuzlu [Hurmuzlu et al., 1986], dans le cas des bipèdes, l'impact avec le sol du pied de la jambe en balancement peut jouer un rôle stabilisateur sur la locomotion. Aussi paraît-il crucial d'en donner une modélisation convenable. A ce stade, deux approches s'affrontent. La première préconise l'emploi du modèle rigide aux points de contact, la seconde, un modèle compliant, allant du simple ressort à des modèles plus complexes comme celui de Hertz.
Il paraît difficile de rejeter de manière définitive l'une ou l'autre de ces approches. Un des arguments majeurs allant à l'encontre de la première est qu'il n'existe aucun corps parfaitement rigide, même si l'hypothèse de rigidité est classiquement faite en robotique. De plus, comme nous l'illustrerons dans le chapitre consacré à l'exemple de Painlevé, il existe des configurations où le problème du calcul des forces de contact n'a pas de solution (on parle alors d'*inconsistance*) ou bien a plusieurs solutions donnant lieu à des trajectoires distinctes (on parle alors d'*indétermination*). Cette approche possède néanmoins l'avantage de proposer une formulation simple de la dynamique faisant intervenir un minimum de paramètres du système facilement identifiables.
La seconde approche introduisant de la compliance pose, elle aussi, de nombreux problèmes. Du point de vue de la validité de modèle approximant, le minimum requis est que ce modèle, lorsqu'on le fait tendre faire le modèle rigide (en faisant tendre par exemple les raideurs vers l'infini dans le cas de ressorts), livre une so-

lution admissible du modèle purement rigide. Il paraît clair que l'introduction de compliance raide (raideur de l'ordre de 10^5 N/m) pour approcher le cas rigide donne lieu à de nombreux problèmes de stabilité numérique : l'équation différentielle du mouvement qu'il s'agit d'intégrer devient raide et il est nécessaire d'avoir recours à des pas d'intégration très faible imposant des temps de simulation important. L'identification des paramètres du modèle (raideurs et autres amortisseurs) aux différents points de contact est loin d'être facile à réaliser du point de vue pratique. Enfin, une des critiques les plus profondes à l'égard de cette approche réside dans la sensibilité du résultat du processus de choc vis à vis du choix des raideurs. Une étude détaillée de l'*exemple des* 3 *boules* ("Newton's cradle") dans [Daniela, 1995] illustre différents problèmes : 2 boules (ou sphères ou particules) sont en contact au repos sur le sol. Il n'y a pas de dissipation entre les boules et le sol. Une troisième boule vient percuter la première (ce qui donne lieu à un impact double) et on s'intéresse aux vitesses post-impact. L'étude montre que si l'on modélise les contacts par des ressorts, le résultat du choc est une fonction directe du rapport entre les deux raideurs. Plus précisement il s'avère que la variation du rapport des raideurs d'un facteur 10 entraîne une variation des vitesses post-impact des 2 premières boules d'un facteur 3 ou 4. Par conséquent, un facteur déterminant dans ces phénomènes de chocs multiples est la durée relative des temps de contact en chaque point de contact. De plus, cette influence est indépendante des valeurs absolues des raideurs : on est confronté au même problème si l'on choisit des raideurs de 10^5 et 10^6 (ou 10^5 et 10^5) que si l'on avait choisi un choc plus mou avec 10 et 100 (ou 10 et 10). Il est alors aisé de comprendre que pour un système plus complexe (comme celui d'un multipode) comprenant par exemple 20 degrés de liberté et 6 points de contact, les résultats d'un choc seront très différents en fonction du choix des différentes raideurs aux contacts et la sensibilité sera difficile à quantifier.
Aussi peut-il sembler naturel de s'orienter, comme nous l'avons fait, vers des règles de chocs multiples pour le cas rigide qui nous permettent de "savoir où l'on va", pouvant certes paraître parfois légèrement arbitraires, mais qui ont néanmoins été validées en grande partie par des études expérimentales.

Dans cette thèse, nous débuterons dans le chapitre 1 par un état de l'art des contributions récentes dans le domaine de la mécanique des systèmes de corps rigides avec contraintes unilatérales avec ou sans frottement sec. Ce chapitre nous permettra de présenter les questions fondamentales consécutives au choix de cette modélisation qui portent sur les difficultés de l'intégration de la trajectoire de tels systèmes ; nous verrons que le problème de calcul des forces de contact peut se ramener à la résolution d'un LCP ("Linear Complementarity Problem") n'admettant pas toujours de solution (unique).
Le chapitre 2 est dédié à l'étude détaillée de l'exemple de Painlevé qui constitue une sorte de cas d'école sur les inconsistances et indéterminations auxquelles on peut

être confronté durant l'intégration de tels systèmes. Ce chapitre constitue la contribution principale de cette thèse, car il tend à prouver sur la base de cet exemple simple et contrairement à ce qui était considéré jusqu'ici comme un fait accompli depuis un siècle que même s'il existe des régions de l'espace des états où le modèle est inconsistant, à partir du moment où le système est initialisé dans un mode consistant, ces régions ne sont atteignables que par le choix d'une solution particulière à partir d'un mode indéterminé. Nous montrerons que, pour des coefficient de frottement supérieurs à une valeur seuil inconnue jusqu'ici de la communauté, la force de contact peut prendre des valeurs infinies. Nous verrons que ce résultat communément utilisé comme une preuve de l'existence d'une incompatibilité entre la mécanique des corps rigides et la loi de frottement d'Amontons-Coulomb (aucun corps ne demeurant rigide sous l'action d'une force infinie, [Pfeiffer et al., 1996]) ne pose pas de problème théorique, l'impulsion de la force de contact demeurant quant à elle bornée.
Dans le chapitre 3, nous partirons de la constatation que les différents modes de locomotion à pattes que l'on rencontre dans la nature ont tous pour caractéristique commune d'éviter tout glissement au niveau des points d'appui. Nous exhiberons, sous des hypothèses généralement réalisées, des conditions nécessaires et suffisantes sous forme d'inégalités mettant en jeu la commande et l'état courant du système, pour garantir le maintien en contact statique de certains appuis et forcer le décollage en d'autres points. Nous verrons que les hypothèses qui nous ont été nécessaires concernent un type d'indépendance entre les contraintes et permettent le calcul explicite des forces d'interactions du LCP précédemment cité. Une seconde étude basée sur une loi de choc plastique (aboutissant au même type de LCP) nous permettra de donner des conditions similaires mettant en jeu l'état pré-impact pour garantir le non-glissement en post-impact.

Enfin, il paraît important de rappeler ici que cette thèse traite de la modélisation de systèmes de corps *rigides* soumis à un *nombre fini* de contraintes unilatérales. Comme toute modélisation, celle-ci ne constitue au mieux qu'une approximation de la réalité. Pour des architectures lourdes comme les robots marcheurs, les masses importantes des différents segments peuvent remettre en cause l'hypothèse de rigidité des corps, du moins à l'instant des impacts. Notons néanmoins que les phénomènes vibratoires aux moments des chocs ne remettent nullement en question l'aspect “corps rigides”, comme l'a montré récemment Hurmuzlu dans [Hurmuzlu, 1998] en définissant un coefficient de restitution prenant en compte de manière explicite l'énergie dissipée par les vibrations. Une autre critique potentielle de l'approche pour laquelle nous avons opté est que les appuis au sol peuvent être réalisés par l'intermédiare de structures molles, en collant par exemple des semelles en caoutchouc pour lesquelles la loi de frottement sec d'Amontons-Coulomb ne constituerait qu'une piètre approximation (il serait alors nécessaire d'avoir recours à un modèle incluant du frottement visqueux). Notons encore que des résultats expérimentaux récents [Stoianovici et al., 1996] concernant des chocs de barres (pouvant constituer une première approximation d'une jambe d'un bipède) avec un sol rigide ("slender rod benchmark example") montrent que le modèle très simple d'Amontons-Coulomb appliqué au niveau impulsionnel livre des résultats acceptables.

Chapitre I

Mécanique des corps rigides avec contraintes unilatérales et frottement sec

1 Introduction

Ces dernières années ont vu grandir l'intérêt que portent les communautés des roboticiens et des automaticiens pour les systèmes mécaniques soumis à des impacts. Une manière de modéliser de tels systèmes consiste à introduire un ensemble de contraintes unilatérales sous la forme :

$$F(q) \geq 0,\ \ q \in \mathbf{R}^{n_q},\ \ F : \mathbf{R}^{n_q} \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

q représente ici le vecteur complet des coordonnées généralisées. En d'autres termes, n_q correspond au nombre de degrés de liberté du système sans contrainte, c'est-à-dire dans la région $F(q) > 0$. Ces contraintes signifient que les corps qui constituent le système mécanique ne peuvent pas s'interpénétrer. Il est clair que d'autres modèles de contact et d'impact existent, comme ceux incorporant une compliance aux points de contact. Notre but est non pas de discuter dans les détails les avantages et inconvénients propres à ces deux approches, mais bien plutôt de nous concentrer sur certains problèmes relatifs à l'hypothèse des corps rigides.

La dynamique d'un système mécanique à n_q degrés de liberté soumis à m contraintes unilatérales peut s'écrire sous la forme du système d'équations (Σ) suivant :

$$\begin{aligned} & M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q}) = Tu + \nabla F(q)\lambda_n + P_t(q,\dot{q}) && \text{(I.1)} \\ & \lambda_n^T F(q) = 0,\ \ \lambda_n \geq 0,\ \ F(q) \geq 0 && \text{(I.2)} \\ & \text{Loi de restitution + dynamique des chocs} && \text{(I.3)} \\ & \text{Modèle de frottement sec d'Amontons-Coulomb} && \text{(I.4)} \end{aligned}$$

$M(q)$ désigne la matrice d'inertie, $N(q,\dot{q})$ regroupe les termes provenant de la gravité, de la force centrifuge ainsi que de la force de Coriolis, Tu correspond aux actions extérieures. Les autres termes et variables seront définis ultérieurement.
Il est clair que la dynamique (I.1)-(I.4) englobe aussi bien la classe des robots bipèdes que celle des robots manipulateurs ou des jongleurs, ainsi que celle des systèmes avec jeux ("backlash").
L'équation (I.1) représente la dynamique continue lorsque le système évolue soit en mouvement libre (phase de vol pur), soit dans une phase de contact permanent, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_i(q) \equiv 0 & \text{pour certains } i \in \mathcal{I}(q) \subseteq \{1,\ldots,m\} \\ F_j(q) > 0 & \text{pour } j \notin \mathcal{I}(q) \end{array} \right. \qquad \text{(I.5)}$$

L'ensemble des équations dans (I.2) formule les conditions de complémentarité entre les forces normales $\lambda_n \in \mathbf{R}^m$ et les positions. En conséquence, dans (I.1) :

$$\nabla F \lambda_n = \sum_{i=1}^{i=m} \nabla F_i \lambda_{n,i}$$

Notons que pour tout $i \in \mathcal{I}(q)$, on peut exprimer (I.2) sous la forme

$$\lambda_{n,i}\dot{F}_i(q) = 0,\ \ \lambda_{n,i} \geq 0,\ \ \dot{F}_i(q) \geq 0 \tag{I.6}$$

ou bien

$$\lambda_{n,i}\ddot{F}_i(q) = 0,\ \ \lambda_{n,i} \geq 0,\ \ \ddot{F}_i(q) \geq 0 \tag{I.7}$$

voir [Jean, 1993] ainsi que les conditions de Signorini pour d'autres formulations des relations de complémentarité.
Les relations (I.2), (I.6) et (I.7) ne sont pas équivalentes. En effet il est envisageable d'avoir $F_i(q(\tau_0)) = 0$ et $\dot{F}_i(q(\tau_0)) > 0$ ou bien $\ddot{F}_i(q(\tau_0)) > 0$. Dans le premier cas, d'après (I.2), on aurait $\lambda_{n,i} \geq 0$, alors que de (I.6), il vient que $\lambda_{n,i} = 0$; il en va évidemment de même pour le second cas, en utilisant (I.7). Plus précisément, analysons le cas où une contrainte active i devient passive à $t = \tau_0$, voir [Löststedt, 1982]. Sur $(0, \tau_0]$, on a :

$$\begin{aligned} F_i &= 0, \\ \dot{F}_i &= \nabla F_i^T \dot{q} = 0, \\ \ddot{F}_i &= \nabla F_i^T \ddot{q} + f(q, \dot{q}) = 0. \end{aligned}$$

Le fait que la contrainte active i devienne passive à l'instant τ_0 se traduit par le fait qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ pour lequel sur $(\tau_0, \tau_0 + \epsilon_0)$, on a $F_i > 0$. Or :

$$F_i(t) = \nabla F_i^T(\tau_0)\dot{q}(\tau_0)(t - \tau_0) + O((t - \tau_0)^2) > 0$$

Par conséquent, il existe $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_1 < \epsilon_0$, tel que sur $(\tau_0, \tau_0 + \epsilon_1)$, $\dot{F}_i > 0$.
De manière similaire, il existe $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_2 < \epsilon_1$, pour lequel sur $(\tau_0, \tau_0 + \epsilon_2)$, $\ddot{F}_i > 0$.
Par conséquent, (I.2) est valable sur $(0, +\infty)$, (I.6) sur $(0, \tau_0 + \epsilon_1)$ et (I.7) uniquement sur $(0, \tau_0 + \epsilon_2)$.
Remarquons que ce procédé de dérivation successive peut être réitéré *ad libitum* : van der Schaft [van der Schaft et al., 1996b] parle alors de DCP ("Dynamical Complementarity Problem"). Notons enfin que comme la suite $(\epsilon_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante, la simulation numérique nécessitera un pas d'intégration d'autant plus petit que l'on choisira de travailler avec une formulation faisant intervenir une dérivée par rapport au temps d'ordre plus élevé de la distance relative aux points de contact.

L'intérêt de la formulation dans (I.7) réside dans le fait qu'en utilisant (I.1), elle permet l'écriture d'un LCP ("Linear Complementarity Problem") dont les inconnues sont les forces d'interaction. L'obtention d'un unique couple (λ_n, λ_t) constitue en retour une condition suffisante pour l'intégration (numérique, par exemple) de (Σ) sur $(\tau_0, \tau_0 + \epsilon)$, pour un $\epsilon > 0$ suffisamment petit, voir [Moreau, 1985]. Néanmoins, l'intégration peut être traitée sous une forme *implicite*, c'est-à-dire sans calcul explicite des forces de contacts, comme proposé par le "sweeping process", voir [Moreau,

1986] et la section 2.1 pour une introduction ; $\dot{q}(\tau_0^+)$ est obtenu directement à partir de $\dot{q}(\tau_0^-)$ et de la force généralisée $Tu - N(q,\dot{q})$, par l'intermédiaire d'une procédure de projection garantissant la non-violation des contraintes à l'instant τ_0^+.
Finalement les modèles dans (I.3) et (I.4) sont nécessaires pour compléter la dynamique. En particulier, il est indispensable de relier les vitesses post-impact aux données pré-impact pour être capable d'intégrer le système et pour pouvoir rendre le domaine $\Phi \triangleq \{q \mid F(q) \geq 0\}$ invariant.
Le modèle classique de frottement sec dans (I.4) fournit l'expression de $P_t(q,\dot{q})$ dans (I.1), comme cela sera exposé dans la section 2.2.

Il semble que l'ensemble des équations (I.1)-(I.7) définit un système dynamique hybride complexe, dans le sens où il combine des phénomènes continus à des phénomènes à événements discrets. Les états du système à événements discrets (SED, "discrete-event system") sont définis par les 2^m modes provenant des conditions de complémentarité dans (I.2). En fait, l'intégration de ces systèmes pose bien plus de difficultés que celle des équations différentielles ordinaires (EDO) ou des équations algébro-différentielles (EAD). En effet, supposons que l'état initial continu $(q_0, \dot{q}_0)$ appartienne à un certain mode, que nous noterons $\mathcal{I}(q_0)$ à partir de (I.5), et que l'EAD associée soit bien posée (il semble que la condition minimale requise pour que (Σ) soit bien posé soit qu'à tout mode $\mathcal{I}(q)$ corresponde un système bien-posé d'EADs, voir [van der Schaft et al., 1996b]). Il peut alors arriver que l'état $(q(t), \dot{q}(t))$ atteigne la frontière entre deux (ou plusieurs) modes possibles : une (ou plusieurs) contrainte(s) active(s) $(F_i(q) = 0)$ peu(ven)t devenir inactive(s) $(F_i(q) > 0)$ alors qu'une (ou plusieurs) autre(s) qui étai(en)t inactive(s) devien(nen)t active(s). Plusieurs questions se posent alors :

- Une telle transition est-elle lisse ? En d'autres termes : l'état continu atteint-il la frontière d'une manière telle qu'il entre de façon "naturelle" (ou bien "tangentiellement") dans un autre mode ? Ou bien,

- Est-il nécessaire de modifier de manière abrupte la direction du champ de vecteur continu (ce qui implique un saut dans l'état) ?

- Le prolongement de la trajectoire continue est-il unique ? S'effectue-t'il dans un mode unique ? Il existe des cas pour lesquels la trajectoire est unique mais appartient à plusieurs modes, c'est-à-dire qu'elle évolue sur une variété de codimension ≥ 2 de l'espace des configurations correspondant à un cas indéterminé [van der Schaft et al., 1996b]. D'autres exemples existent aussi où plusieurs trajectoires $(q(t), \dot{q}(t))$ émergent d'un état, liées à des SEDs différentes, et ceci, même si le système est autonome [van der Schaft et al., 1996a, exemple 4.2] ou si les forces de contact λ_n sont déterminées de manière unique [Bressan, 1959].

Enfin, il est aussi important de noter que ces systèmes diffèrent fondamentalement dans leur nature de ceux étudiés dans [Bainov et al., 1989], qui reviennent globalement à des EDOs avec perturbations impulsionnelles.
Dans la suite, nous allons essayer de passer en revue les principales contributions concernant :

1. les modèles particuliers d'impact multiple dans (I.3) avec ou sans frottement,
2. les problèmes d'existence de solution(s) au(x) LCP(s) relatif(s) à (I.2) ou plutôt (I.7) avec ou sans frottement,
3. l'existence et l'unicité de solution(s) au système hybride dynamique complet (Σ) dans (I.1)-(I.4).

Du point de vue de l'ingénieur mécanicien, l'intégration du système (I.1)-(I.4) nécessite de répondre à deux questions [Moreau et al., 1988]:

Q1 Supposons que $\mathcal{I}(q)$ soit non vide à l'instant τ_0 et que la vitesse $\dot{q}(\tau_0^-)$ pointe vers l'intérieur de Φ ou bien soit orientée tangentiellement à Φ [1] : il faut déterminer quel(s) contact(s) $i \in \mathcal{I}(q)$ va (vont) persister à τ_o^+. En d'autres termes, il s'agit de déterminer le mode suivant (c'est-à-dire l'état du SED).

Q2 A l'instant t_k, on a $\dot{q}(t_k^-)^T \nabla F_i(q(t_k)) < 0$ pour certain(s) $i \in \{1, \ldots, m\}$ avec $F_i(q(t_k)) = 0$. En conséquence, un choc intervient à l'instant t_k. Il s'agit de déterminer la vitesse à droite $\dot{q}(t_k^+)$. Ceci revient à déterminer une réinitialisation [van der Schaft et al., 1996b] de l'état (continu) à partir du moment où une (ou plusieurs) condition(s) de complémentarité dans (I.2) va (vont) être violée.

Dans la suite, $t_k,\ k = 0, 1, 2 \ldots$ correspondra de manière générique aux instants d'impact successifs.

Les réponses aux questions précédentes sont loin d'être triviales et elles ont fait l'objet de nombre de travaux de recherche.
La première question est reliée à la résolution du LCP associé au système, c'est-à-dire au problème d'être capable de calculer à chaque instant d'une phase sans collision ni inactivation de contrainte(s) les forces d'interactions $P_q \triangleq \nabla F(q)\lambda_n + P_t(q, \dot{q})$, et par-delà l'accélération $\ddot{q}$ et le mouvement résultant. Delassus [Delassus, 1917] est le premier à avoir soulevé cette question.
La seconde question est celle de définir des lois propres de restitution, ou de collision.

1. Dans le cas où Φ est non-différentiable, correspondant à une surface de codimension ≥ 2 dans $\mathbf{R}^{n_q}$, il est nécessaire d'étendre les notions d'espace normal et d'espace tangent à celles de cône normal et cône tangent respectivement, voir [Moreau et al., 1988].

Cela nous ramène au 17^e siècle, à la célèbre conjecture de Newton, voir [Brogliato, 1996; Kozlov et al., 1991] pour de plus amples détails. En particulier, si plusieurs hypersurfaces $\Sigma_i = \{q \mid F_i(q) = 0\}$ sont atteintes simultanément (ou bien si le système rebondit indéfiniment sur plusieurs Σ_i avec un point d'accumulation fini d'instants d'impact t_k), un *impact multiple* se produit [2]. Définir des lois de restitution pour les impacts multiples telles que le système (I.1)-(I.4) reste bien-posé est loin d'être évident (même le cas d'un impact simple entre deux corps n'est pas évident si le frottement n'est pas négligeable, voir [Brach, 1991; Stronge, 1990]), voir [Ivanov, 1995].

En résumé, le système dynamique hybride dans (I.1)-(I.4) (ou bien dans (I.1)-(I.3),(I.7)) nécessite, afin de pouvoir être intégré, d'une part de répondre aux deux questions Q1 et Q2 mentionnées plus haut et, d'autre part, que les modèles choisis pour répondre à ces questions le rendent bien-posé. Cela signifie que l'on doit être en mesure de calculer de manière unique, à chaque instant t, l'évolution de l'état, ce qui implique en particulier l'étude des LCPs, c'est-à-dire les algorithmes de calculs des forces de contacts.

Enfin, l'approche que l'on choisit pour résoudre ce problème est évidemment fonction des objectifs personnels. Le fait est que des chercheurs en informatique [Baraff, 1993; Lötstedt, 1984], en mathématiques appliquées [Baraff, 1994; Lötstedt, 1982; Trinkle et al., 1995; Pang et al., 1996; Paoli et al., 1993; Paoli, 1993; Monteiro-Marques, 1993; Stewart et al., 1996], en robotique [Trinkle et al., 1995; Pang et al., 1996; Dupont, 1992], en mécanique [Moreau et al., 1988; Han et al., 1993a; Han et al., 1993b; Haug et al., 1986; Pfeiffer et al., 1996] ainsi qu'en automatique [Brogliato et al., 1997; van der Schaft et al., 1996a; van der Schaft et al., 1996b; Tendam et al., 1997] ont fait récemment des avancées significatives concernant les systèmes dynamiques avec contraintes unilatérales.
L'objectif de ce chapitre est de donner un bref état de l'art de ces récents travaux.

2. Ce serait un erreur de confondre un tel phénomène avec ce que l'on appelle classiquement des *micro-collisions*. Les micro-collisions correspondent à une série d'impacts séquentiels entre deux corps ($m = 1$). Ils proviennent des flexibilités et des vibrations résultantes induites par les chocs entre les corps. Au niveau macroscopique la durée de la phase totale de contact est très courte et le phénomène est considéré comme instantané [Marghitu et al., 1996; Stoianovici et al., 1996]. Les micro-collisions sont parfois appelées collisions multiples dans la littérature ce qui peut naturellement porter à confusion.

2 Intégration de (Σ) : une présentation des contributions récentes

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, dans l'introduction, l'intégration et la modélisation de systèmes comme (Σ) a récemment intéressé nombre de chercheurs d'horizons très variés. Malgré le fait que leurs objectifs peuvent différer à plus d'un titre, le problème fondamental demeure celui d'être capable d'intégrer dans tous les cas la trajectoire à partir d'une donnée initiale admissible $q(0), \dot{q}(0)$. A la base, la propriété d'existence et d'unicité de la solution de (Σ) ne peut que contribuer à cet objectif. Ce chapitre ambitionne non pas de faire une classification parmi les contributions, mais bien plutôt de donner une esquisse des problématiques sous-jacentes. De plus dans l'optique lointaine de la conception de loi de commande pour de systèmes mécaniques de corps rigides avec contraintes unilatérales comme les bipèdes, nous nous restreindrons essentiellement aux travaux traitant du cas de plusieurs contraintes simultanément actives. En conséquence, nous n'aborderons pas les différentes lois et coefficients associés de restitution pour le cas basique de deux corps entrant en collision : ce sujet est abordé de manière détaillée dans [Brach, 1991; Brogliato, 1996; Chatterjee, 1997] ainsi que dans les références qui y sont inclues.

2.1 Contacts sans frottement

Le premier paragraphe constitue une étude du LCP dans (I.7), c'est-à-dire des méthodes de calcul des forces de contact. Le second paragraphe traite, lui, des impacts multiples.

2.1.1 Mouvement continu

En l'absence de frottement, (Σ) se résume à (I.1), (I.2) et (I.3), avec $P_t(q, \dot{q}) = 0$. Notons que la relation de complémentarité (I.2) exprime le fait qu'il n'existe pas de force d'attraction ou d'adhésion entre les corps en contact. En particulier, Pérès [Peres, 1953] a prouvé dans le cas $m = 1$ que l'équation dynamique (I.1) accompagnée du caractère unilatéral du déplacement, c'est-à-dire $\dot{F}(q) \geq 0$ ou bien $\ddot{F}(q) \geq 0$, implique que le contact entre les deux corps ne peut casser tant que $\lambda_n > 0$. A notre connaissance ceci constitue l'unique cas où il a effectivement été prouvé que la relation de complémentarité (I.2) était nécessaire.
Moreau [Moreau, 1963; Moreau, 1966], en utilisant le fait que $\ddot{F} = \nabla F^T \ddot{q} + f(q, \dot{q})$ et en posant $h(q, \dot{q}) = Tu - N(q, \dot{q})$, a prouvé que, dans le cas de contraintes multiples $m \geq 1$, la relation de complémentarité (I.7) combinée à (I.1) se traduit en un LCP de la forme

$$\ddot{F} = A\lambda_n + b \geq 0, \quad \lambda_n \geq 0 \text{ et } \lambda_n \ddot{F} = 0 \tag{I.8}$$

où

$$A = \nabla F^T M^{-1} \nabla F$$

et

$$b = \nabla F^T M^{-1} h(q, \dot{q}) + f(q, \dot{q})$$

[Cottle et al., 1992] constitue une introduction aux LCPs et présente les principaux résultats.
Si les contraintes actives ($i \in \mathcal{I}(q)$) sont indépendantes, alors A est une matrice symétrique définie positive (SDP) et il est connu que le LCP dans (I.8) possède alors une solution λ_n unique, voir [Cottle et al., 1968]. Par contre, si plusieurs contraintes actives sont dépendantes, alors A est seulement symétrique semi-définie positive et l'unicité n'est valable qu'au niveau de l'accélération $\ddot{F}$. En conséquence, $\nabla F \lambda_n$ est aussi unique (voir [Lötstedt, 1982, lemme 5.2]) et il en va finalement de même de la dynamique globale $\ddot{q}$ dans (I.1). Un exemple classique est donné par une chaise à quatre pieds en appui sur un sol rigide : même si les forces d'interactions ne peuvent pas être déterminées de manière unique, l'accélération du centre de gravité demeure définie de manière unique.
En utilisant la théorie de Kuhn-Tucker [Kuhn et al., 1951], il est possible de prouver que toute solution λ_n au LCP dans (I.8) est aussi une solution du problème quadratique (PQ)

$$\min_{\lambda_n \geq 0} \frac{1}{2} \lambda_n^T A \lambda_n + \lambda_n^T b \tag{I.9}$$

De [Dorn, 1960], ceci est à nouveau équivalent à la résolution du problème dual associé

$$\min_{\lambda_n} \frac{1}{2} \lambda_n^T A \lambda_n, \quad A\lambda_n + b \geq 0 \tag{I.10}$$

En substituant dans (I.10) $\nabla F \lambda_n$ par $M\ddot{q} + N(q, \dot{q}) - Tu$ extrait de (I.1), on obtient finalement un nouveau problème équivalent

$$\min_{\ddot{q}} \frac{1}{2} \left(\ddot{q} - M^{-1} h(q, \dot{q})\right)^T M \left(\ddot{q} - M^{-1} h(q, \dot{q})\right), \quad \nabla F \ddot{q} + f(q, \dot{q}) \geq 0 \tag{I.11}$$

qui est connu comme le principe de Gauss (*principe des moindres déviations*), voir [Moreau, 1966; Lötstedt, 1982].

D'un point de vue algorithmique, il est à déplorer qu'à l'exception de la dernière décennie la communauté des mathématiciens appliqués s'est plus consacrée à l'élaboration de méthodes performantes pour la résolution de PQ que pour la classe particulière des LCPs. D'où l'intérêt de la précédente suite d'équivalences.
Notons que les travaux récents proposent de résoudre les LCPs, ou plus généralement les NCPs ("Nonlinear Complementarity Problem") par le biais de l'optimisation

sans contrainte [Fischer, 1992; Kanzow, 1996], en introduisant ce que l'on appelle des *fonctions NCP* $\phi : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ satisfaisant la condition de complémentarité :

$$\phi(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad ab = 0$$

Des exemples de fonctions admissibles sont :

$$\begin{array}{rcl} \phi(a,b) & = & \frac{1}{2}\min^2(a,b), \\ \phi(a,b) & = & \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a - b\right)^2. \end{array}$$

Dans notre cas $a = \ddot{F}$ et $b = \lambda_n$ sont des vecteurs de dimension $p = \mathrm{card}(\mathcal{I}(q))$. Considérons la fonction :

$$\Psi : \mathbf{R}^p \mapsto \mathbf{R}, \quad \Psi(\lambda_n) = \sum_{i \in \mathcal{I}(q)} \phi(\lambda_{n,i}, \ddot{F}_i(\lambda_n))$$

Les algorithmes se basent alors sur le lemme suivant [Fischer, 1992] :

Lemme I.1

> *Supposons que le problème de complémentarité admette une solution et que ϕ soit une fonction NCP avec $\phi(a,b) \geq 0$, $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$. Alors :*
>
> *λ_n^* est un minimum global de Ψ $\Leftrightarrow$ λ_n^* est une solution du problème de complémentarité.*

En résumé il est clair que si l'on est capable d'obtenir à gauche de l'instant τ_0 une valeur de λ_n, alors l'introduction de cette dernière à l'intérieur de (I.2) permet de déterminer quel(s) contact(s) va(vont) persister à τ_0^+ et quel(s) contact(s) va (vont) casser (devenir inactif(s)) sur $(\tau_0, \tau_0 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, ϵ suffisamment petit.

Remarque

Comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, la réponse à la question Q1 ne nécessite pas forcément le calcul explicite de la forces de contact λ_n. Considérons l'exemple simple ($n_q = 1$) d'une balle posée sur le sol ($m = 1$) à gauche de l'instant τ_0. Supposons qu'une force extérieure f soit appliquée à la balle à l'instant τ_0. L'accélération $\ddot{q}$ est alors donnée par :

$$\ddot{q} = \max(0, f) \tag{I.12}$$

La formulation discrète de (I.12) par le schéma d'Euler avec un pas de temps T s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q_{i+1} & = & q_i + T\dot{q}_i \\ \dot{q}_{i+1} & = & \mathrm{prox}\left[\mathbf{R}^+, \dot{q}_i + Tf\right] \end{array} \right. \tag{I.13}$$

Ce schéma implicite peut être généralisé à des systèmes plus complexes ($n_q \geq 1$, $m \geq 1$), comme le propose Moreau [Moreau, 1986]. La procédure de “proximation” $\text{prox}\left[\mathbf{R}^+, x\right] \equiv \max(0, x)$ n'a été introduite ici qu'en vue de l'extension à la résolution du problème des impacts multiples comme nous allons l'illustrer dans la section suivante.

2.1.2 Impacts multiples

Le paragraphe précédent était consacré à donner une réponse partielle à la question Q1. Nous nous concentrons maintenant sur la question Q2.
En général les robots marcheurs se servent de plusieurs points de support durant leur locomotion (robots bipèdes [Hurmuzlu et al., 1986; Hurmuzlu et al., 1987; Hurmuzlu, 1993], robots quadrupèdes [Chevallereau et al., 1997; Perrin et al., 1997]). En d'autres termes $m \geq 2$. Cela signifie que la frontière $\partial\Phi$ du domaine admissible Φ n'est pas régulière. Ses singularités correspondent à des surfaces de codimension ≥ 2. En conséquence l'éventualité que l'état vienne entrer en collision dans un voisinage d'une singularité ne peut être exclu pour des systèmes mécaniques comme (Σ). Dans le cadre de la locomotion bipèdale, de tels événements font intrinsèquement partie de la dynamique de la marche. Considérons par exemple le problème d'une chaîne cinématique de corps rigides qui entre en collision avec le sol en un point $A_j, j \notin \mathcal{I}(q)$, tout en ayant déjà plusieurs points de support $A_i, i \in \mathcal{I}(q)$. D'une manière plus formelle, il existe un intervalle $T = [t_k - \epsilon, t_k)$ tel que $\mathcal{I}(q)$ demeure invariant sur T alors que $\exists j \notin \mathcal{I}(q) | \dot{q}(t_k^-)^T \nabla F_j(q(t_k)) < 0$ et $F_j(q(t_k)) = 0$. Le problème principal et de loin non trivial est celui de déterminer dans quelle mesure l'impact en A_j va influencer les points A_i : les points initialement en contact vont-ils quitter le sol et que se passe-t-il en A_j ?
Dans le cas particulier des robots marcheurs, il semble important de noter que ces événements de collision correspondent principalement aux collisions avec le sol du pied d'une jambe en phase de balancement. Notre but est non pas de discuter ici l'hypothèse classique du caractère inélastique de ces chocs mais bien plutôt de présenter les différentes approches proposées dans la littérature permettant de résoudre le problème d'un point de vue général. En d'autres termes, considérons le robot bipède comme un point $R(t)$ dans un espace généralisé de configurations de dimension 2. L'hypothèse classique standard de locomotion peut être considérée comme un “mouvement bilatéral de glissement” du point généralisé $R(t)$ confiné aux frontières des deux contraintes comme cela est illustré dans la figure I.1(a). La phase de simple support correspond à $R(t) \in [A, B) \cup (B, C]$, alors que la phase de double appui à $R(t) = B$. On ne peut néanmoins pas exclure :

- des chocs multiples avec rebonds en B, voir figure I.1(b)
- des décollages durant la phase de simple support, comme cela a été présenté

dans le paragraphe précédent et est illustré dans la figure I.1(c).

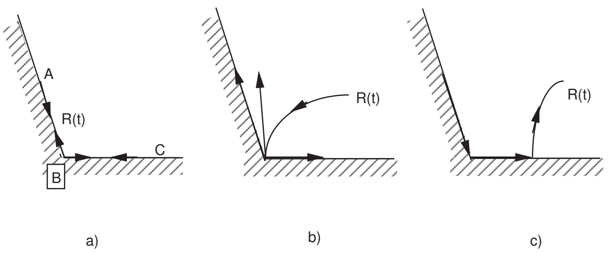

FIG. I.1 – *Mouvements et résultats des chocs possibles*

Les travaux les plus récents dans le domaine peuvent être divisés en trois approches distinctes :

1. La première [Hurmuzlu et al., 1994; Han et al., 1993a] consiste en une procédure d'énumération. Leurs auteurs appliquent une loi de restitution pour simple impact en A_j et propagent séquentiellement ses effets aux autres points de contact $A_i, i \in \mathcal{I}(q)$. Le processus global est néanmoins considéré comme instantané, c'est-à-dire que tous les chocs ont lieu simultanément en tous les points de contacts : il s'agit donc bien d'un impact multiple comme nous l'avons présenté dans l'introduction. Ils examinent en chaque point de contact si l'hypothèse d'une percussion locale nulle ou non nulle mène à un résultat global consistant. L'un des principaux inconvénients de ces études réside dans le fait que les auteurs ne se prononcent ni sur la terminaison de les algorithmes, ni sur l'unicité de la solution trouvée. En particulier, dans le cas de plusieurs solutions admissibles, ils ne donnent aucun critère de sélections permettant d'effectuer un choix parmi les solutions. D'un autre coté ceci ne doit pas être vu forcément comme un inconvénient majeur (sauf dans l'objectif de conception d'un outil de simulation), étant donné que toute heuristique permettant d'effectuer le *bon choix*, excluant en même temps certaines solutions admissibles, va à l'encontre de la l'hypothèse des corps rigides.

2. La seconde approche correspond à la définition d'une *application de collision* ("collision mapping")

$$\begin{array}{rcl} P_c : \partial\Phi \times \{-V(q(t_k))\} & \longrightarrow & \partial\Phi \times \{+V(q(t_k))\} \\ (q(t_k), \dot{q}(t_k^-)) & \longmapsto & (q(t_k), \dot{q}(t_k^+)) \end{array}$$

   où $V(q) = \{v \in \mathbf{R}^{n_q} : \forall i \in \mathcal{I}(q),\ v^T \nabla F_i(q) \geq 0\}$ désigne le cône tangent à $\partial\Phi$ en $q(t)$, c'est-à-dire l'ensemble des vitesses post-impact admissibles. Il est généralement nécessaire [Moreau, 1985] de supposer que $V(q(t_k))$ est non vide. Il est clair que le choix de P_c doit mener à une formulation du phénomène cohérente au niveau aussi bien mathématique que mécanique et numérique. Ce que l'on appelle "sweeping process" ou "procédé de Moreau" [Moreau, 1985; Moreau et al., 1988] est une formulation générale de la dynamique dans (I.1)-(I.4) basée sur des outils de l'analyse convexe. Elle permet d'écrire la dynamique comme une inclusion différentielle de mesure particulière. Elle définit implicitement une application de collision basée sur le calcul du mouvement post-impact par l'intermédiaire d'une procédure de "proximation" dans la métrique cinétique :

$$\dot{q}(t_k^+) = \mathrm{prox}_{M(q(t_k))}\left[\dot{q}(t_k^-), V(q(t_k))\right] \tag{I.14}$$

Les principales contributions quant à l'existence de solution(s) relatives à cette approche sont à trouver dans le livre de Monteiro-Marques [Monteiro-Marques, 1993]. Elles utilisent une procédure de discrétisation du temps similaire à celle de (I.13) et prouvent que les solutions discrétisées convergent vers une fonction solution de (Σ). Pour l'instant, ces preuves sont restreintes au cas $m = 1$.
[Paoli et al., 1993] livre d'autres résultats ; en particulier [Paoli, 1993] prouve l'existence de solutions ($q(t)$ absolument continues et $\dot{q}(t) \in RCLBV$[3]) dans le cas $m > 1$ avec $T(t_k^+) = T(t_k^-)$ où $T(t)$ désigne l'énergie cinétique.
[van der Schaft et al., 1996a] introduit une autre application de collision de la manière suivante : soit $\mathcal{J}(q(t_k))$ l'ensemble des contraintes qui étaient actives avant t_k et qui demeureront actives dans un futur proche, union l'ensemble de celles qui vont être violées. P_c est implicitement défini par la condition $\dot{q}(t_k^+)^T \nabla F_j(q(t_k)) = 0,\ \forall j \in \mathcal{J}(q(t_k))$. Les deux applications de collision sont équivalentes dans le cas $\mathrm{card}(\mathcal{J}(q(t_k))) = 1$, mais elles sont généralement différentes, comme cela est illustré dans la figure I.2. L'existence et l'unicité de la solution de (Σ) en utilisant cette application de collision a été démontrée dans [van der Schaft et al., 1996a] pour des systèmes bi-modaux (cas $m = 1$) en l'absence de toute force extérieure ($u = 0$ et pas de gravité).
Il nous semble important de mentionner que ces applications appliquées au choc de deux corps rigides correspondent au choix d'un coefficient de restitution nul. C'est pour cette raison qu'elles sont parfois appelées "lois de choc dissipatives généralisées" ("generalized dissipative impact rules"). Il est malgré tout possible d'introduire une sorte de restitution $\delta \in [0, 1]$ en substituant dans (I.14) $\dot{q}(t_k^+)$ par $\frac{1}{2}(1+\delta)\dot{q}(t_k^+) + \frac{1}{2}(1-\delta)\dot{q}(t_k^-)$.

3. La troisième approche [Lötstedt, 1982] peut être vue comme une extension du principe de Gauss (I.11) à la dynamique des impacts. La dynamique du choc est donnée par

$$M(q)\Delta\dot{q} = \nabla F(q)\Lambda_n \tag{I.15}$$

3. continues à droite et à variations locales bornées ("Right Continuous with Local Bounded Variation")

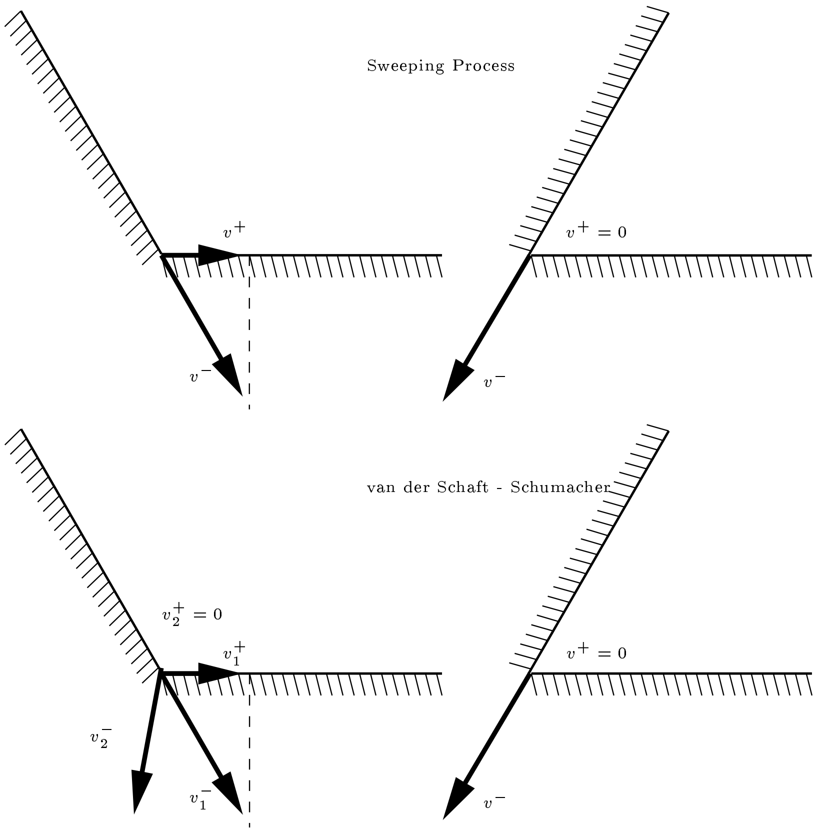

FIG. I.2 – *Applications de collision*

où $\Delta\dot{q} = \dot{q}(t_k^+) - \dot{q}(t_k^-)$ correspond au saut en vitesse à l'instant de l'impact multiple $t = t_k$; Λ_n désigne l'impulsion suivant la(les) normale(s) au(x) contact(s). En généralisant la relation de complémentarité (I.7) au niveau impulsionnel sous la forme

$$\nabla F^T \dot{q}(t_k^+) \geq 0, \quad \Lambda_n \geq 0, \quad \Lambda_n^T \nabla F^T \dot{q}(t_k^+) = 0 \tag{I.16}$$

et en insérant l'expression de la vitesse post-impact $\dot{q}(t_k^+)$ tirée de (I.15), on aboutit finalement au LCP suivant :

$$\nabla F^T \dot{q}(t_k^+) = \nabla F^T M^{-1} \nabla F \Lambda_n + \nabla F^T \dot{q}(t_k^-) \geq 0, \quad \Lambda_n \geq 0, \quad \Lambda_n^T \nabla F^T \dot{q}(t_k^+) = 0 \tag{I.17}$$

De manière similaire au cas du mouvement continu, on peut prouver que le LCP ainsi défini admet toujours une solution Λ_n. On en déduit aussi que $\nabla F \Lambda_n$ est unique.

> Le LCP dans (I.17) est équivalent au problème quadratique
>
> $$\min_{\dot{q}(t_k^+)} \frac{1}{2}\left(\dot{q}(t_k^+) - \dot{q}(t_k^-)\right)^T M \left(\dot{q}(t_k^+) - \dot{q}(t_k^-)\right), \quad \nabla F^T \dot{q}(t_k^+) \geq 0 \tag{I.18}$$
>
> qui peut être vu comme une généralisation du principe de Gauss aux impacts multiples. De (I.14) il est apparent que tant que $V(q(t_k))$ est un cône convexe non vide, (I.18) est équivalent au procédé de Moreau [Moreau et al., 1988].

Il est intéressant de noter que la décomposition classique du phénomène d'impact en une phase de compression $[t_A \equiv t_k^-, t_C]$ suivie d'une phase d'expansion $[t_C, t_E \equiv t_k^+]$ avec un coefficient de Poisson nul, comme proposé dans [Pfeiffer et al., 1996], mène au même résultat. La phase de compression peut être formulée comme dans (I.17) en substituant t_k^-, t_k^+ et Λ_n par t_A, t_C et Λ_{nC} respectivement. Puis, en utilisant une substitution similaire pour la phase d'expansion, on aboutit finalement au LCP suivant :

$$\nabla F^T \dot{q}(t_E) = \nabla F^T M^{-1} \nabla F \Lambda_{nE} + \nabla F^T \dot{q}(t_C) \geq 0, \quad \Lambda_{nE} \geq 0, \quad \Lambda_{nE}^T \nabla F^T \dot{q}(t_E) = 0$$

avec comme solution particulière $\Lambda_{nE} = 0$ correspondant à l'unique solution $\dot{q}(t_k^+) = \dot{q}(t_C)$, pour les mêmes raisons que précédemment. En effet la solution unique de la phase de compression garantit que $\nabla F^T \dot{q}(t_C) \geq 0$.

Nous illustrons les différentes approches explicitées plus haut sur l'exemple des 3 balles connu sous le terme de "Newton's cradle", voir figure I.3 et tableau I.1. Les données initiales sont $q_2(0) > q_1(0), q_2(0) = q_3(0)$ et $\dot{q}_1(0) = 1, \dot{q}_2(0) = 0, \dot{q}_3(0) = 0$. Dans l'espace des configurations, le système est en glissement le long de la contrainte $q_2(t) - q_3(t) = 0$ et l'impact multiple se produit à l'instant $t = t_k$. La perte d'énergie cinétique est notée $T_L = T(t_k^+) - T(t_k^-)$.

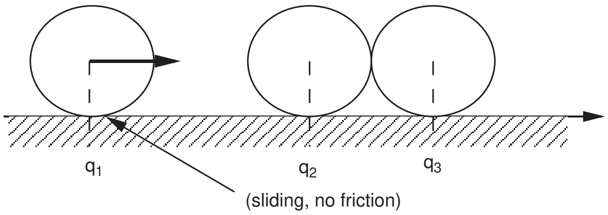

FIG. I.3 – *Le système des 3 balles*

	$\dot{q}_1(t_k^+)$	$\dot{q}_2(t_k^+)$	$\dot{q}_3(t_k^+)$	T_L
[Han et al., 1993a]	$-1/3$	$2/3$	$2/3$	0
	0	0	1	0
[Pfeiffer et al., 1996]	$-1/3$	$2/3$	$2/3$	0
[van der Schaft et al., 1996a]	$1/3$	$1/3$	$1/3$	< 0
[Moreau et al., 1988]	$1/3$	$1/3$	$1/3$	< 0
	$-1/3$	$2/3$	$2/3$	0
[Lötstedt, 1984]	$1/3$	$1/3$	$1/3$	< 0
[Haug et al., 1986]	$-1/3$	$2/3$	$2/3$	0
	$1/3$	$1/3$	$1/3$	< 0

TAB. I.1 – *Résultats de l'impact sur le système des 3 balles*

Remarques

1. En résumé, le caractère bien posé de (Σ) dépend de celui du LCP, de la définition de l'application de collision (de manière implicite ou explicite) et des forces extérieures appliquées (Tu dans (I.1)). Il a par exemple été prouvé dans [Bressan, 1959] que la trajectoire $(q, \dot{q})$ de (Σ) peut ne pas être définie de manière unique alors que le LCP dans (I.8) admet une solution unique. A l'opposé, et comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, il existe des cas où le LCP possède plusieurs solutions distinctes en termes de forces de contact, alors que (Σ) possède lui une trajectoire unique $(q, \dot{q})$.

2. Tant que (Σ) est bien posé, on n'est pas contraint par le choix de l'application de collision. C'est un autre problème de vérifier leur intérêt pratique.

3. Tous les résultats post-impact présentés dans la figure I.1 sont acceptables a priori. L'étude d'une séquence de problèmes compliants approximants, les contacts entre les balles étant modélisés par des ressorts linéaires de raideurs respectives k_1 et k_2, montre que l'on peut obtenir une infinité de résultats en fonction du rapport $\alpha = \dfrac{k_1}{k_2}$. Les deux solutions de la figure I.1, $\dot{q}(t_k^+) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ et $\dot{q}(t_k^+) = (0, 0, 1)^T$, correspondent respectivement au cas $\alpha = 0$ et $\alpha = +\infty$, voir [Brogliato, 1996; Newby Jr., 1979; Ivanov, 1995].

4. Haug et al. [Haug et al., 1986] traite de chaîne cinématique avec un seul point de collision auquel ils appliquent la conjecture de Newton. Il est supposé que toutes les contraintes actives demeurent actives après le choc : dans la figure (I.1), ceci correspond aux trajectoires de A à B et de B à A. Il est apparent que ceci n'est pas suffisant pour modéliser un robot marcheur.

5. Il est intéressant de noter que même si les lois de chocs présentées ici [Han et al., 1993a; Pfeiffer et al., 1996; Moreau et al., 1988; Haug et al., 1986] se contredisent entre elles, elles livrent toutes le même résultat $\dot{q}(t_k^+) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$, dans le cas où $T_L = 0$. Remarquons tout de même que la solution classique des livres est plutôt donnée par $\dot{q}(t_k^+) = (0, 0, 1)^T$, correspondant au mouvement post-impact si l'on suppose que $q_2(t_k) < q_3(t_k)$ et que le coefficient de restitution e est nul entre les 3 balles (il s'agit alors d'une succession de chocs inélastiques simples).

2.2 Contacts avec frottement d'Amontons-Coulomb

Nous venons de voir qu'en l'absence de frottement le LCP (I.8) était finalement bien posé étant donné que la seule indétermination, provenant de contraintes actives dépendantes, n'influence pas le mouvement global du système mécanique (il y a unicité de l'accélération du centre de gravité). Nous allons voir dans la suite que le problème se complique fortement par l'introduction du frottement sec qui constitue un élément indispensable de la locomotion à pattes. Dans la partie consacrée au mouvement continu, nous allons voir que la décomposition des caractéristiques tangentielles forces et accélérations nous mène à nouveau à un LCP, dont les inconnues sont liées à l'ensemble des forces d'interactions λ_n et λ_t.

2.2.1 Mouvement continu

Une première étape consiste à formuler la loi de frottement d'une manière adéquate afin de déterminer les forces tangentielles généralisées $P_t(q, \dot{q})$.
Définissons $\dot{F}_{t,i}(q, \dot{q}) = G_i^T(q)\dot{q},\ i \in \mathcal{I}(q)$ comme le vecteurs de vitesses tangentielles relatives aux points de contact. Sans perte de généralité, nous nous concentrerons sur la loi de frottement d'Amontons-Coulomb dans le cas 2D qui est formulée classiquement par

$$\forall i \in \mathcal{I}(q) : \quad \begin{cases} \dot{F}_{t,i}(q, \dot{q}) & = & 0 & \Longrightarrow & |\lambda_{t,i}| \leq \mu_{0,i}\lambda_{n,i} \\ \dot{F}_{t,i}(q, \dot{q}) & < & 0 & \Longrightarrow & \lambda_{t,i} = +\mu_i\lambda_{n,i} \\ \dot{F}_{t,i}(q, \dot{q}) & > & 0 & \Longrightarrow & \lambda_{t,i} = -\mu_i\lambda_{n,i} \end{cases} \tag{I.19}$$

où $\mu_{0,i}$ et μ_i correspondent aux coefficients de frottement statique et dynamique au point de contact i, et $P_t(q, \dot{q}) = \sum\limits_{i \in \mathcal{I}(q))} G_i(q)\lambda_{t,i}$.
Soit $\mathcal{I}_0(q, \dot{q}) \subset \mathcal{I}(q)$ l'ensemble de points de contacts potentiellement statiques

$$\mathcal{I}_0(q, \dot{q}) = \left\{ i \in \mathcal{I}(q) \mid \dot{F}_{t,i}(q, \dot{q}) = 0 \right\}$$

De (I.19) il vient que les forces tangentielles aux points contact en glissement (dynamique) sont directement reliées à leurs forces normales respectives par

$$\forall i \in \mathcal{I}(q) \backslash \mathcal{I}_0(q, \dot{q}),\ \lambda_{t,i} = -\mu_i\lambda_{n,i}\mathrm{sign}(\dot{F}_{t,i}) \tag{I.20}$$

Etant donné que les accélérations et vitesses tangentielles relatives ont le même signe lors des transitions de l'état statique vers l'état dynamique, un modèle complet pour les points de contact potentiellement statique peut être exprimé sous la forme

$$\forall i \in \mathcal{I}_0(q,\dot{q}) \quad \left\{ \begin{array}{lclcl} |\lambda_{t,i}| & < & \mu_{0,i}\lambda_{n,i} & \Longrightarrow & \ddot{F}_{t,i} = 0 \\ \lambda_{t,i} & = & +\mu_{0,i}\lambda_{n,i} & \Longrightarrow & \ddot{F}_{t,i} \leq 0 \\ \lambda_{t,i} & = & -\mu_{0,i}\lambda_{n,i} & \Longrightarrow & \ddot{F}_{t,i} \geq 0 \end{array} \right. \tag{I.21}$$

La principale difficulté consiste maintenant à réécrire les équations précédentes avec des variables uniquement positives ou nulles, afin d'obtenir une formulation de complémentarité standard. Ceci peut être réalisé en introduisant des variables positives ou nulles ("slack variables") :

$$\forall i \in \mathcal{I}_0(q,\dot{q}) : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda^+_{t,i} & = & \frac{1}{2}(|\lambda_{t,i}| + \lambda_{t,i}) \\ \lambda^-_{t,i} & = & \frac{1}{2}(|\lambda_{t,i}| - \lambda_{t,i}) \\ \lambda^-_{t0,i} & = & \mu_{0,i}\lambda_{n,i} - \lambda^+_{t,i} \\ \lambda^+_{t0,i} & = & \mu_{0,i}\lambda_{n,i} - \lambda^-_{t,i} \\ \ddot{F}^+_{t,i} & = & \frac{1}{2}(|\ddot{F}_{t,i}| + \ddot{F}_{t,i}) \\ \ddot{F}^-_{t,i} & = & \frac{1}{2}(|\ddot{F}_{t,i}| - \ddot{F}_{t,i}) \end{array} \right. \tag{I.22}$$

On a alors :

$$\forall i \in \mathcal{I}_0(q,\dot{q}) : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_{t,i} & = & \lambda^+_{t,i} - \lambda^-_{t,i} \\ \ddot{F}_{t,i} & = & \ddot{F}^+_{t,i} - \ddot{F}^-_{t,i} \end{array} \right.$$

Ceci nous permet d'interpréter (I.21) comme l'ensemble de conditions de complémentarité suivant [Pfeiffer et al., 1996; Trinkle et al., 1995] :

$$\forall i \in \mathcal{I}_0(q,\dot{q}) : \quad \left\{ \begin{array}{lclclcl} \ddot{F}^+_{t,i} & \geq & 0, & \lambda^+_{t,i} & \geq & 0, & \ddot{F}^+_{t,i}\lambda^+_{t,i} = 0 \\ \ddot{F}^-_{t,i} & \geq & 0, & \lambda^-_{t,i} & \geq & 0, & \ddot{F}^-_{t,i}\lambda^-_{t,i} = 0 \\ \lambda^-_{t0,i} & \geq & 0, & \ddot{F}^-_{t,i} & \geq & 0, & \lambda^-_{t0,i}\ddot{F}^-_{t,i} = 0 \\ \lambda^+_{t0,i} & \geq & 0, & \ddot{F}^+_{t,i} & \geq & 0, & \lambda^+_{t0,i}\ddot{F}^+_{t,i} = 0 \end{array} \right. \tag{I.23}$$

Par exemple, si $\ddot{F}_{t,i} < 0$, alors $\ddot{F}^-_{t,i} > 0$ alors que $\ddot{F}^+_{t,i} = 0$; par conséquent, $\lambda^-_{t,i} = \lambda^-_{t0,i} = 0$, alors que $\lambda^+_{t,i} \geq 0$ et $\lambda^+_{t0,i} \geq 0$. De $\lambda^-_{t0,i} = 0$, on déduit que $\lambda^+_{t,i} = \mu_{0,i}\lambda_{n,i}$ et donc, finalement, $\lambda_{t,i} = \mu_{0,i}\lambda_{n,i}$.

Posons $p = \mathrm{card}(\mathcal{I}(q)) \leq m$ et $r = \mathrm{card}(\mathcal{I}_0(q,\dot{q})) \leq p$.
A la vue de (I.7) et (I.23), les variables de complémentarité sont définies de manière naturelle par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \begin{pmatrix} \ddot{F} \\ \ddot{F}_t^+ \\ \ddot{F}_t^- \\ \lambda_{t0}^- \\ \lambda_{t0}^+ \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{p+4r} \\ \\ x & = & \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \lambda_t^+ \\ \lambda_t^- \\ \ddot{F}_t^- \\ \ddot{F}_t^+ \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{p+4r} \\ \\ y & \geq & 0, \quad x \geq 0, \quad y^T x = 0 \end{array}\right.$$

De même que dans le cas sans frottement, il est maintenant nécessaire d'insérer l'équation de la dynamique (I.1), reliant toutes les inconnues, afin d'obtenir le LCP complet, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & Ax + b \\ y & \geq & 0, \quad x \geq 0, \quad y^T x = 0 \end{array}\right. \tag{I.24}$$

Introduisons [Pfeiffer et al., 1996] :

$$\left\{\begin{array}{lcl} G_{stick} & = & \{G_i(q), i \in \mathcal{I}_0(q,\dot{q})\} \in \mathbf{R}^{n_q \times r} \\ \\ G_{slide} & = & \{G_i(q), i \in \mathcal{I}(q) \backslash \mathcal{I}_0(q,\dot{q})\} \in \mathbf{R}^{n_q \times (p-r)} \\ \\ \mu_{slide} & = & \left\{-\mu_i \mathrm{sign}(\dot{F}_{t,i}), i \in \mathcal{I}(q) \backslash \mathcal{I}_0(q,\dot{q})\right\} \in \mathbf{R}^{(p-r)\times p} \\ \\ \mu_{stick} & = & \{\mu_{0,i}, i \in \mathcal{I}_0(q,\dot{q})\} \in \mathbf{R}^{r \times p} \\ \\ \lambda & = & \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \lambda_t^+ \\ \lambda_t^- \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{p+2r} \\ \\ W & = & \begin{pmatrix} \nabla F & +G_{stick} & -G_{stick} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n_q \times (p+2r)} \\ \\ N_{slide} & = & \begin{pmatrix} G_{slide}\mu_{slide} & 0_{n_q \times r} & 0_{n_q \times r} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n_q \times (n_q+2r)} \end{array}\right. \tag{I.25}$$

Notons que les matrices dans (I.25) sont construites de la manière suivante. Supposons que le vecteur des contraintes F ait été réordonné de telle façon que les $p-r$ premiers indices correspondent aux points de contact en glissement et que les r indices correspondent à ceux en contact statique. On aurait alors $\mu_{slide} = \begin{pmatrix} \text{diag}[-\mu_i \text{sign}(\dot{F}_{t,i})] & 0_{(p-r)\times r} \end{pmatrix}$. μ_{stick} est construit de manière analogue.

De (I.20), on obtient finalement une réécriture compacte de la dynamique sous la forme

$$M\ddot{q} = h + (W + N_{slide})\lambda \tag{I.26}$$

(I.26) est une reformulation de la dynamique dans (I.1) exploitable dans l'optique de calculer les forces de contact par le biais d'un LCP : les forces de frottement $P_t(q,\dot{q})$ sont désormais décomposées de manière adéquate.
Etant donné que $\ddot{F} = \nabla F(q)^T\ddot{q} + f(q,\dot{q})$ et que $\ddot{F}_t = G(q)^T\ddot{q} + f_t(q,\dot{q})$, en posant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_{t,stick} & = & \{f_{t,i}, i \in \mathcal{I}_0(q,\dot{q})\} \in \mathbf{R}^r \\ w & = & \begin{pmatrix} f \\ +f_{t,stick} \\ -f_{t,stick} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{p+2r} \\ N_{stick} & = & \begin{pmatrix} \mu_{stick} & 0_{r\times r} & 0_{r\times r} \\ \mu_{stick} & 0_{r\times r} & 0_{r\times r} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(2r)\times(p+2r)} \end{array}\right. \tag{I.27}$$

puis :

$$\left\{\begin{array}{rcl} I & = & \begin{pmatrix} 0_{r\times p} & Id_{r\times r} & 0_{r\times r} \\ 0_{r\times p} & 0_{r\times r} & Id_{r\times r} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(2r)\times(p+2r)} \\ A & = & \begin{pmatrix} W^T M^{-1}(W + N_{slide}) & I^T \\ N_{stick} - I & 0_{(2r)\times(2r)} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(p+4r)\times(p+4r)} \\ b & = & \begin{pmatrix} W^T M^{-1} h + w \\ 0_{2r} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{p+4r} \end{array}\right. \tag{I.28}$$

où Id désigne la matrice identité, on obtient les expressions finales des différents éléments du LCP dans (I.24).

Remarques

1. Les “slack-variables” $\lambda_{t0,i}^-$ et $\lambda_{t0,i}^+$ dans (I.22) sont introduites uniquement pour des raisons de lisibilité du LCP dans (I.23).

2. La formulation donnée ci-dessus se base sur les relations de complémentarité entre accélérations et forces, de même que dans (I.7). C'est une manière pratique pour calculer les forces d'interaction. Néanmoins, si l'objectif est simplement d'étudier le caractère bien posé de (Σ) sans se soucier explicitement des expressions des forces d'interaction, alors les formulations telles que celles dans (I.6) ou (I.2) peuvent être suffisantes [Monteiro-Marques, 1993]. En particulier [van der Schaft et al., 1996b] formule la loi de frottement d'Amontons-Coulomb au niveau des vitesses (il ne descend pas jusqu'aux accélérations) par l'introduction de "slack-variables" similaires à celles introduites dans (I.22) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_{t,i}^{++} & = & \mu_{0,i}\lambda_{n,i} + \lambda_{t,i} \\ \lambda_{t,i}^{--} & = & \mu_{0,i}\lambda_{n,i} - \lambda_{t,i} \\ \dot{F}_{t,i}^{+} & = & \frac{1}{2}(|\dot{F}_{t,i}| + \dot{F}_{t,i}) \\ \dot{F}_{t,i}^{-} & = & \frac{1}{2}(|\dot{F}_{t,i}| - \dot{F}_{t,i}) \end{array} \right. \tag{I.29}$$

Le modèle de frottement est exprimé par les relations de complémentarité suivantes :

$$\forall i \in \mathcal{I}(q) : \quad \left\{ \begin{array}{lcllcllcl} \dot{F}_{t,i}^{+} & \geq & 0, & \lambda_{t,i}^{++} & \geq & 0, & \dot{F}_{t,i}^{+}\lambda_{t,i}^{++} & = & 0 \\ \dot{F}_{t,i}^{-} & \geq & 0, & \lambda_{t,i}^{--} & \geq & 0, & \dot{F}_{t,i}^{-}\lambda_{t,i}^{--} & = & 0 \end{array} \right. \tag{I.30}$$

Notons que les LCPs définis dans (I.24), (I.27), (I.28) d'une part, et (I.29), (I.30) d'autre part, sont de natures différentes. Le premier traite les transitions entre frottement statique et frottement statique ou glissement, les points de contact en glissement ayant déjà été traités dans (I.20). Le second LCP constitue une reformulation directe de la loi d'Amontons-Coulomb. En d'autres termes, le premier correspond à un mode particulier du second.

3. *Cône de frottement généralisé*
Il est important de rappeler que l'image du cône de frottement réel (c'est-à-dire le cône en chaque point de contact dans l'espace cartésien 2D ou 3D) dans l'espace des configurations n'est généralement pas un cône de révolution autour de $\nabla F(q)$ de sommet le point de contact, voir [Erdmann, 1994; Moreau, 1986]. Cette remarque est valable même dans le cas où l'espace des configurations est de dimension 3, voir l'exemple de Painlevé traité plus loin.

4. *Cas du contact 3D*
La formulation précédente peut être étendue au cas 3D en décomposant la composante tangentielle force/accélération aux points en contact statique en

deux directions orthogonales t et o dans le plan tangent. La loi d'Amontons-Coulomb stipule que la force de contact demeure à l'intérieur ou sur le bord du cône de frottement, c'est-à-dire

$$\forall i \in \mathcal{I}(q), \quad \lambda_{t,i}^2 + \lambda_{o,i}^2 \leq \lambda_{n,i}^2 \tag{I.31}$$

Ces contraintes non-linéaires rendent le modèle non-linéaire, ce qui aboutit à un "Nonlinear Complementarity Problem" (NCP), voir [Trinkle et al., 1995; Stewart et al., 1996]. Une manière de contourner cette difficulté consiste en une approximation des cônes aux points de contact statique par des pyramides de frottement à quatre cotés, ce qui ramène le problème à la résolution d'un LCP. De plus amples détails sont à trouver dans [Trinkle et al., 1995], ainsi que dans [Pang et al., 1996] au sujet d'une extension aux régions localement planes à nombre fini de points de contact transmettant des moments autour des directions normales aux points de contact distribués.

5. *Existence et unicité de(s) solution(s) du LCP*
De même que pour toute formulation en LCP, le problème de l'existence et de l'unicité de la solution est directement relié aux propriétés de positivité de la matrice A dans (I.24), c'est-à-dire (I.27) et (I.28). Rappelons les définitions suivantes [Trinkle et al., 1995] :

Définition I.1

> *A est dite une $\mathbf{P}_0$-matrice si toutes ses principales sous-matrices ont des déterminants positifs ou nuls.*
> *A est dite une $\mathbf{P}$-matrice si toutes ses principales sous-matrices ont des déterminants strictement positifs.*

Le principal résultat concernant l'existence de solution(s) aux LCPs généraux est le suivant [Trinkle et al., 1995] :

Lemme I.2

> *Si A est une $\mathbf{P}$-matrice, alors pour tout vecteur b, le LCP sous la forme (I.24) a une solution unique. L'unicité de la solution est perdue si A est seulement une $\mathbf{P}_0$-matrice*

Regardons de plus près la définition de la matrice A dans (I.27) et (I.28). Notons qu'en l'absence de frottement ($\mu_{0,i} = \mu_i = 0, \forall i \in \mathcal{I}(q)$), (I.24) se réduit directement à (I.8) où A est au minimum une $\mathbf{P}_0$-matrice (dans le cas où les contraintes actives sont dépendantes).

Une propriété importante des $\mathbf{P}$-matrices et $\mathbf{P}_0$-matrices réside dans le fait qu'elles ne perdent pas leurs propriétés sous l'effet de petites perturbations. En d'autres termes, si A est une $\mathbf{P}$-matrice ou bien une $\mathbf{P}_0$-matrice (ce qui est le cas pour les mouvements sans frottement), alors toutes les matrices $\tilde{A}$ suffisamment proches de A sont aussi des $\mathbf{P}$-matrices, ou $\mathbf{P}_0$-matrices respectivement. A la vue de cette propriété, on peut maintenant comprendre intuitivement le résultat théorique le plus avancé de la littérature à notre connaissance [Trinkle et al., 1995] :

Proposition I.1

> *Si les contraintes sont indépendantes, alors il existe un scalaire strictement positif $\bar{\mu}$ tel que si $\mu_i \in [0, \bar{\mu}], \forall i \in \mathcal{I}(q) \backslash \mathcal{I}_0(q, \dot{q})$, le problème de contact 3D avec cône de frottement ou son approximation pyramidale admet toujours une solution.*

En d'autres termes, si les coefficients de frottement aux points de contact en glissement sont suffisamment faibles, alors le LCP a toujours une solution. De plus

Proposition I.2

> *Si $\mu_i \in [0, \bar{\mu}], \forall i \in \mathcal{I}(q)$, alors l'unicité de la solution est aussi garantie.*

La principale difficulté est maintenant de trouver une estimée correcte de la borne supérieure $\bar{\mu}$. Le calcul d'une telle borne est loin d'être facile, étant donné que A est aussi une fonction de l'état $(q, \dot{q})$. De plus, il est fortement probable que cette estimée ne soit pas acceptable en s'avèrant trop petite pour modéliser des systèmes réels. Ceci provient probablement du fait que la $\mathbf{P}$-propriété ou la $\mathbf{P}_0$-propriété de A, sur laquelle se base les résultats précédents, est une hypothèse trop forte concernant l'existence de solution(s) du LCP. Il s'agit juste d'une condition suffisante, et il faudrait tenter de la relaxer. En effet, comme nous l'avons dit plus haut, la $\mathbf{P}$-propriété ou $\mathbf{P}_0$-propriété de la matrice A garantit l'existence de solution(s) au LCP (I.24) pour *tout* vecteur b. En reprenant à notre avantage le fait que A et b dépendent non seulement du coefficient de frottement mais aussi et surtout de l'état, une question intéressante d'un point de vue pratique se pose alors :

Etant donnés μ_i de borne supérieure $\mu_{max} = \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} \mu_i$ non nécessairement $\leq \bar{\mu}$, alors, partant d'une configuration consistante à l'instant t_0, c'est-à-dire que le LCP (I.24) admet une solution ($A(t_0)$ n'est pas nécessairement une $\mathbf{P}$-matrice ou une $\mathbf{P}_0$-matrice), comment le système, et par delà A et b, évoluent-ils ?

En d'autres termes :

Si le système est initialisé dans une configuration consistante au sens du LCP, le système atteint-il durant son évolution les configurations inconsistantes dans le cas où de telles configurations existent du point de vue mathématique ?

A notre connaissance, cette question qui est d'un intérêt pratique indéniable ne semble pas avoir été abordée de manière sérieuse jusqu'ici et demeure en conséquence complètement ouverte. Une des raisons possibles réside probablement dans les difficultés mathématiques sous-jacentes. Notons que l'introduction de la loi de frottement d'Amontons-Coulomb au niveau tangentiel augmente le nombre de modes dans lesquels le système peut évoluer. En effet, de (I.30), il vient que chaque contrainte active ajoute 4 modes, où celui correspondant au cas où $\dot{F}_{t,i}^{+} > 0$ et $\dot{F}_{t,i}^{-} > 0$ est néanmoins irréalisable à la vue de (I.29). L'étude que nous avons effectuée plus loin sur l'exemple de Painlevé qui fascine la communauté depuis plus d'un siècle présente quelques éléments de réponse [Génot et al., 1997].

6. Une manière de contourner le problème de l'existence et de l'unicité des solutions au LCP et à (Σ) consiste en l'introduction d'une compliance aux points de contact [Neimark, 1995]. D'autres auteurs proposent des modifications de la loi de frottement sec d'Amontons-Coulomb au niveau de la procédure de discrétisation [Lötstedt, 1984; Stewart et al., 1996] : il est déploré que ces derniers ne donnent aucune justification physique de leurs choix.

2.2.2 Impacts multiples

Les trois approches présentées pour le cas sans frottement dans la section 2.1.2 peuvent être étendues (avec des fortunes variées) au cas avec frottement.

- Les procédures dans [Han et al., 1993a; Han et al., 1993b; Hurmuzlu et al., 1994] sont complétées par une énumération des différentes issues possibles, à savoir glissement vers la gauche, glissement vers la droite et contact statique, en chaque point de contact.

- Moreau propose une formulation dans le cas d'un seul choc purement inélastique en 2D dans [Moreau et al., 1988], et dans le cas de chocs multiples dans [Moreau, 1994].
  Le premier algorithme dans [Moreau et al., 1988] est basé sur une extension de la loi d'Amontons-Coulomb au niveau impulsionnel, de manière similaire aux algorithmes de Whittaker [Whittaker, 1994] et Pérès [Peres, 1953], dans lesquels on suppose que la direction de l'impulsion est définie à partir de la vitesse tangentielle post-impact.
  Le second algorithme dans [Moreau, 1994] fait partie de la *loi de contact complète* (*"Complete Contact Law"*) et traite les chocs multiples élastiques avec coefficients de restitution dans les directions normales et tangentielles basés sur l'introduction de ce que l'on appelle la *"vitesse moyenne"* (*"average velocity"*) en chaque point de contact. L'accent est mis sur l'application aux matériaux granulaires.

- Lötstedt dans [Lötstedt, 1984] suggère une généralisation a priori "naturelle" du principe de Gauss au cas avec frottement en réécrivant le LCP dans (I.17) en le problème quadratique suivant :

$$\min \tfrac{1}{2}\Lambda^T H^T M^{-1} H \Lambda + \Lambda^T H^T \dot{q}(t_k^-)$$

$$\Lambda_n \geq 0, \quad -\mu_i \Lambda_{n,i} \leq \Lambda_{t,i} \leq \mu_i \Lambda_{n,i}$$

où $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_n \\ \Lambda_t \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} \nabla F & G \end{pmatrix}$. Il montre que les conditions de Kuhn-Tucker au point optimal livrent que :

$$\Lambda^T H^T \dot{q}(t_k^+) = 0 \tag{I.32}$$

Même si ceci ressemble à une relation d'orthogonalité entre les impulsions et les vitesses post-impact, (I.32) accompagnée du fait que l'impulsion appartient au cône de frottement n'implique aucune relation de complémentarité entre les impulsions et les vitesses post-impact *dans la direction de la normale*, ce qui est le minimum requis pour un choc plastique. Cela signifie de façon générale que cette loi peut donner lieu à des rebonds. De plus, cette loi n'est pas cohérente du point de vue énergétique dans le cas d'inversion de la vitesse tangentielle (*tangential velocity reversal*).

Pfeiffer et Glocker dans [Pfeiffer et al., 1996, Chapitre 8] utilisent la loi d'impact de Poisson (avec une phase de compression et une phase d'expansion). Ils étendent la loi de frottement d'Amontons-Coulomb au niveau impulsionnel. L'introduction de "slack-variables" similaires à celles introduites dans le cas du mouvement continu leur permet de formuler un LCP pour chaque phase, dont les inconnues sont les vitesses terminales (en fin de phase) et les impulsions. Des modifications des lois, de restitutions de Poisson d'une part, et d'Amontons-Coulomb d'autre part, pour la phase d'expansion sont proposées afin de traiter les contraintes de non-pénétrabilité et de rester cohérent du point de vue énergétique. En particulier, étant donné que la matrice du LCP pour la phase de compression a la même forme que celle correspondant au mouvement continu, ils ne peuvent garantir ni l'existence ni l'unicité de(s) solution(s).

- Il est à noter que les lois précédemment citées assurent soit l'existence de solutions au dépend de la consistance physique du résultat de l'impact, soit des solutions ayant un sens physique au dépend de la propriété d'existence et d'unicité de la solution.
- Certains auteurs s'intéressent à ce que l'on appelle les *"collisions tangentielles"* (*"tangential collisions"*), c'est-à-dire au comportement des lois de chocs lorsque la vitesse d'approche suivant la normale tend vers zéro [Wang et al., 1992; Chatterjee, 1997; Batlle, 1993; Brach, 1997]. Il est important de noter que ce type de chocs frôlants diffèrent totalement de l'analyse des phases de glissement où la force de contact peut tendre vers l'infini, voir l'exemple de Painlevé traité plus loin. En effet, dans ces études, la dérivée seconde de la distance par rapport au temps est strictement négative juste avant le contact alors que toutes les dérivées d'ordres supérieurs de la vitesse relative normale sont identiquement nulles durant une phase de glissement continu.

3 Résumé

Nous concluerons par une énumération des différentes questions abordées dans cet état l'art et des contributions récentes associées.

1. Frottement
   (a) Contraintes sans frottement [Lötstedt, 1982; Baraff, 1993; Baraff, 1994; Trinkle et al., 1995; Moreau et al., 1988; Pfeiffer et al., 1996; Han et al., 1993b; Stewart et al., 1996; van der Schaft et al., 1996a; van der Schaft et al., 1996b]
   (b) Loi d'Amontons-Coulomb statique [Baraff, 1994; Trinkle et al., 1995; Moreau et al., 1988; Pfeiffer et al., 1996; Han et al., 1993b; van der Schaft et al., 1996b]
   (c) Loi d'Amontons-Coulomb dynamique [Lötstedt, 1984; Baraff, 1993; Baraff, 1994; Trinkle et al., 1995; Moreau et al., 1988; Pfeiffer et al., 1996; Han et al., 1993b; van der Schaft et al., 1996b]

   (d) 3D [Baraff, 1994; Trinkle et al., 1995; Stewart et al., 1996]

2. Loi de restitution pour les impacts multiples [Lötstedt, 1982; Lötstedt, 1984; Moreau et al., 1988; Pfeiffer et al., 1996; Han et al., 1993a; van der Schaft et al., 1996a; Hurmuzlu et al., 1994]

3. Formulation avec LCP ou NCP [Lötstedt, 1982; Lötstedt, 1984; Baraff, 1993; Baraff, 1994; Trinkle et al., 1995; Stewart et al., 1996; Pfeiffer et al., 1996]

4. Analyse des inconsistances ("Impact WithOut Collision" IW/OC) [Baraff, 1993; Moreau et al., 1988; Stewart et al., 1996]

5. Analyse of indéterminations : plusieurs solutions au LCP

   (a) Indéterminations provenant de la loi de frottement [Lötstedt, 1984; Baraff, 1993; Ivanov, 1986]

   (b) Indéterminations provenant du fait que rank$\nabla F < m$ [Lötstedt, 1982]

6. Aspects de simulation

   (a) Procédure de la discrétisation de la dynamique [Lötstedt, 1984; Moreau et al., 1988]

   (b) Algorithme de résolution des LCPs ou NCPs

      i. Lemke [Baraff, 1993; Pfeiffer et al., 1996]

      ii. Spécifiques [Lötstedt, 1984; Baraff, 1994; Trinkle et al., 1995; Moreau, 1986; Moreau et al., 1988]

7. Problèmes d'existence de solution

   (a) LCP [Lötstedt, 1982; Trinkle et al., 1995; Stewart et al., 1996]

   (b) NCP [Trinkle et al., 1995]

   (c) Caractère bien posé de (Σ) [Monteiro-Marques, 1993; van der Schaft et al., 1996a; van der Schaft et al., 1996b; Paoli et al., 1993; Schatzman, 1978; Schatzman, 1995; Percivale, 1985; Percivale, 1991]

Rappelons enfin que la question fondamentale demeurant encore ouverte à ce jour est celle relative au caractère bien posé de (Σ) en présence de frottement sec. Certains auteurs proposent de légères modifications de la loi de frottement d'Amontons-Coulomb [Stewart et al., 1996] ou bien du schéma de discrétisation [Lötstedt, 1984] permettant d'aboutir à un problème bien posé.

Dans le chapitre 2, nous allons essayer d'illustrer, sur un exemple simple, que même si le problème originel demeure très difficile, il serait peut-être un peu hatif de conclure sur une réelle incompatibilité entre la loi de frottement d'Amontons-Coulomb et l'hypothèse des corps rigides.

Chapitre II

L'exemple de Painlevé

1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'illustrer, sur la base d'un exemple simple, les difficultés sous-jacentes à toute tentative de preuve d'existence et d'unicité de solution(s) au système (Σ) décrit précédemment. Nous présenterons en particulier le problème d'*indétermination* ("indeterminacy") qui apparaît parfois dans la dynamique des corps rigides, c'est-à-dire le cas où il est impossible de justifier un choix parmi plusieurs comportements prédits par la théorie. Nous aborderons également un problème voisin constitué par les *inconsistances* ("inconsistency"), à savoir l'existence de configurations du système pour lesquelles la théorie ne donne aucune solution du tout. Plus précisément, il n'existe pas de solution bornée au problème si bien qu'il est nécessaire d'augmenter l'espace de recherche des solutions pour inclure des vitesses discontinues permettant ainsi au système de "s'échapper" instantanément de la zone inconsistante en sautant dans une autre zone. Au niveau des forces d'interactions, ceci se traduit par l'introduction de forces impulsionnelles (au sens des distributions).

Par exemple, l'introduction de la loi de frottement d'Amontons-Coulomb peut donner lieu à un phénomène appelé *impact sans collision* (*"Impact WithOut Collision"*, IW/OC) : il y a un saut en vitesse alors que la vitesse normale initiale est nulle. Ce phénomène est à mettre en correspondance avec le *principe des contraintes* de Kilmister [Kilmister et al., 1966] selon lequel, pour vérifier une contrainte unilatérale, on doit avoir recours à une solution dans l'espace des impulsions *si et seulement si* il n'existe pas de solution dans l'espace des forces.

De nombreux problèmes relatifs aux inconsistances consécutives à l'introduction de la loi de frottement d'Amontons-Coulomb ont été identifiés depuis le début du siècle, voir [Brogliato, 1996, p. 151] pour une liste non exhaustive. D'un point de vue historique, Jellet [Jellet, 1872] et Painlevé [Painlevé, 1895; Painlevé, 1905] furent les premiers à identifier ce type d'inconsistance, alors que l'idée d'avoir recours à une solution impulsionnelle fut proposée pour la première fois par Lecornu [Lecornu, 1905].

Dans ce chapitre nous nous concentrerons sur un exemple simple (mais néanmoins très riche) avec une seule contrainte unilatérale, constitué par ce que l'on appelle parfois [Matrosov et al., 1994] l'*Exemple de Painlevé* [Painlevé, 1895]. L'analyse de ce cas d'école en tant que système hybride dynamique constitue la principale originalité de ce travail. Nous verrons que cette analyse passe par une étude fine d'une équation différentielle singulière.

2 Présentation du modèle

L'Exemple de Painlevé correspond à une barre rigide, mince, homogène et plan de masse m, de longueur $2l$ et d'inertie $I = \frac{ml^2}{3}$. Nous étudierons le cas où la barre est en contact ponctuel en une seule de ses extrémités, que nous dénoterons A, avec une surface plane rigide, voir Fig. II.1.

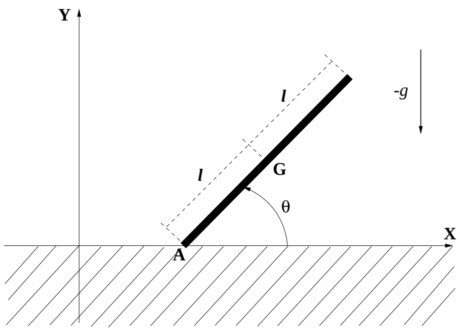

FIG. II.1 – *L'Exemple de Painlevé*

Soit $G = (x, y)^T$ et $A = (x_A, y_A)^T$ respectivement les coordonnées cartésiennes par rapport à un référentiel galiléen du centre de gravité de la barre et du point de contact A. Le système est paramètré par le vecteur des coordonnées généralisées $q = (x, y, \theta)^T$, où θ désigne l'angle (mesuré dans le sens trigonométrique) entre la barre et le sol.

La contrainte unilatérale est alors donnée par :

$$F(q) = y_A = y - l \sin\theta \geq 0 \tag{II.1}$$

Le frottement au niveau du point de contact est régi par la loi d'Amontons-Coulomb pour laquelle $\mu \geq 0$ désigne le coefficient de frottement. Les actions extérieures agissant sur la barre sont la gravité, $(0, -mg)^T$, et la force de réaction au point de contact A, $(F_N, F_T)^T$.

Etant donné qu'aucun couple n'est appliqué à la barre en A, la dynamique générale du système est régie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m\ddot{x} & = & F_T \\ m\ddot{y} & = & -mg + F_N \\ I\ddot{\theta} & = & l\,(-\cos\theta F_N + \sin\theta F_T) \end{array} \right. \tag{II.2}$$

avec

$$\begin{cases} y_A F_N = 0, \;\; y_A \geq 0, \;\; F_N \geq 0 \\ \dot{x}_A = 0 \Rightarrow -\mu F_N \leq F_T \leq \mu F_N \\ \dot{x}_A > 0 \Rightarrow F_T = -\mu F_N \\ \dot{x}_A < 0 \Rightarrow F_T = \mu F_N \end{cases}$$

Comme le mentionnent Van der Schaft et Schumacher [van der Schaft et al., 1996b], il est aisé de voir que le système mécanique considéré peut-être vu comme un système hybride dynamique ayant quatre modes.

Définition II.1

Soit X le vecteur d'état du système :

$$X = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Les quatre modes du système hybrides sont définis par :

- $M_I = \left\{X \in \mathbf{R}^6\right\}$ *avec* $y_A(y,\theta) > 0$. *On a :*

$$F_N = F_T = 0$$

- $M_{II} = \left\{X \in \mathbf{R}^6\right\}$ *avec* $y_A(y,\theta) = 0$ *et* $\dot{x}_A(\theta,\dot{x},\dot{\theta}) < 0$. *On a :*

$$F_N \geq 0, \;\; F_T = \mu F_N$$

- $M_{III} = \left\{X \in \mathbf{R}^6\right\}$ *avec* $y_A(y,\theta) = 0$ *et* $\dot{x}_A(\theta,\dot{x},\dot{\theta}) > 0$. *On a :*

$$F_N \geq 0, \;\; F_T = -\mu F_N$$

- $M_{IV} = \left\{X \in \mathbf{R}^6\right\}$ *avec* $y_A(y,\theta) = 0$ *et* $\dot{x}_A(\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = 0$. *On a :*

$$F_N \geq 0, \;\; -\mu F_N \leq F_T \leq \mu F_N$$

Le mode M_I correspond à la phase de vol, et aucune force de contact ne s'exerce sur la barre. Les modes M_{II} et M_{III} sont identiques à une redéfinition du référentiel galiléen près. Enfin le mode M_{IV} ne pose pas réellement de difficultés. En effet, comme l'ont prouvé successivement Lötstedt [Lötstedt, 1981] et Baraff [Baraff, 1993, théorème 4], le problème de détermination des forces de contact est toujours bien posé dans le cas planaire avec une seule contrainte unilatérale active à l'instant courant, et en frottement statique, c'est-à-dire qu'il admet toujours une solution unique.

Dans la suite, nous effectuerons une étude approfondie du mode M_{II}.

Hypothèse II.1

> *Nous supposerons que le système a été initialisé dans le mode M_{II}, c'est-à-dire :*

$$\begin{cases} y_A(t_0) = 0 \\ \dot{y}_A(t_0) = 0 \\ \dot{x}_A(t_0) < 0 \end{cases}$$

En conséquence, les seules transitions possibles sont celles du mode M_{II} vers les modes M_I, M_{IV}, c'est-à-dire le décollage de la barre ou bien l'arrêt de glissement du point A.
Dans le mode M_{II}, l'expression de la composante tangentielle de la force de réaction est donnée par $F_T = \mu F_N$. La dynamique du système (II.2) dans le régime de glissement étudié se réécrit :

$$\begin{cases} m\ddot{x} &=& \mu F_N \\ m\ddot{y} &=& -mg + F_N \\ I\ddot{\theta} &=& l(-\cos\theta + \mu\sin\theta)F_N \end{cases} \tag{II.3}$$

Afin de prendre en compte le caractère unilatéral du contact en A, il est nécessaire d'écrire la relation de complémentarité qui lie la force normale F_N et l'accélération normale $\ddot{y}_A$. En dérivant deux fois par rapport au temps l'expression de y_A donnée dans (II.1) et en substituant les expressions de $\ddot{y}$ et $\ddot{\theta}$ extraites de (II.3), nous obtenons finalement :

$$\ddot{y}_A = -\mathcal{A} + \mathcal{B}F_N \geq 0, \;\; F_N \geq 0, \;\; F_N\ddot{y}_A = 0 \tag{II.4}$$

où

$$\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta}) = g - l\dot{\theta}^2 \sin\theta \tag{II.5}$$

et

$$\mathcal{B}(\theta, \mu) = \frac{1}{m}(1 + 3\cos\theta(\cos\theta - \mu\sin\theta)) \tag{II.6}$$

Il est à noter que la transition du mode ($\ddot{y}_A = 0, \;\; F_N \geq 0$) vers le mode ($\ddot{y}_A > 0, \;\; F_N = 0$) du LCP en (II.4) correspond à la transition du mode M_{II} vers le mode M_I du système hybride.

3 Analyse préliminaire

3.1 Les zones d'inconsistance et d'indétermination

Suivant les signes de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, il est aisé de conclure quant au nombre de solution(s) du LCP (II.4), voir tableau II.1.

mode	sgn($\mathcal{A}$)	sgn($\mathcal{B}$)	Solution(s) du LCP
(1)	+	+	$F_N = \dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$
(2)	+	-	$\emptyset$
(3)	-	+	$F_N = 0$
(4)	-	-	$F_N = 0$ et $F_N = \dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$

TAB. II.1 – *Solutions du LCP*

Définition II.2

On notera :

- $\mathcal{M}_i$ *l'ensemble des états du système où la barre est dans le mode* M_{II} *du système hybride et dans le mode (i) du LCP,*
- $\mathcal{M}_i^+$ *et* $\mathcal{M}_i^-$*, les sous-ensembles de* $\mathcal{M}_i$ *avec* $\dot{\theta} > 0$ *et* $\dot{\theta} < 0$ *respectivement.*

Exemple

$$\mathcal{M}_1^+ = \left\{ X \in \mathbf{R}^6 \right\} \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} y_A(y,\theta) = 0 \\ \dot{y}_A(\dot{y},\theta,\dot{\theta}) = 0 \\ \dot{x}_A(\dot{x},\theta,\dot{\theta}) < 0 \\ \mathcal{A}(\theta,\dot{\theta}) > 0 \\ \mathcal{B}(\theta,\mu) > 0 \\ \dot{\theta} > 0 \end{array} \right.$$

Les états inconsistants sont ceux pour lesquels $\mathcal{A} > 0$ et $\mathcal{B} < 0$, alors que les états indéterminés sont caractérisés par $\mathcal{A} < 0$ et $\mathcal{B} < 0$. Il paraît donc important d'étudier $\text{sgn}(\mathcal{B})$.

Une étude rapide et facile de la fonction $\mathcal{B}(\theta,\mu)$ permet de voir que :

- si $0 \leq \mu < \dfrac{4}{3}$, alors $\forall\theta,\ \ \mathcal{B}(\theta,\mu) > 0$ et le système est toujours consistant.

– si $\mu \geq \frac{4}{3}$, alors, en posant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \theta_{c1}(\mu) & = & \arctan\left(\dfrac{3\mu - \sqrt{9\mu^2 - 16}}{2}\right) \\ \theta_{c2}(\mu) & = & \arctan\left(\dfrac{3\mu + \sqrt{9\mu^2 - 16}}{2}\right) \end{array} \right. \tag{II.7}$$

il vient que :

– $\forall \theta \in [0, \theta_{c1}(\mu)) \bigcup (\theta_{c2}(\mu), +\infty)$, $\mathcal{B}(\theta, \mu) > 0$ et le problème est consistant.
– $\forall \theta \in (\theta_{C1}(\mu), \theta_{C2}(\mu))$, $\mathcal{B}(\theta, \mu) < 0$ et le problème est soit inconsistant, soit indéterminé, suivant le signe de $\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta})$,
– $\mathcal{B}(\theta_{c1}(\mu), \mu) = \mathcal{B}(\theta_{c2}(\mu), \mu) = 0$.

De même pour $\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta})$ il vient :

– si $\dot{\theta} > \sqrt{\frac{g}{l \sin\theta}}$, alors $\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta}) > 0$,
– si $\dot{\theta} < \sqrt{\frac{g}{l \sin\theta}}$, alors $\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta}) < 0$,
– $\mathcal{A}(\theta, \pm\sqrt{\frac{g}{l \sin\theta}}) = 0$.

Il est à noter que les deux valeurs critiques dans (II.7) vérifient $0 < \theta_{c1} < \theta_{c2} < \frac{\pi}{2}$.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement au cas $\mu \geq \frac{4}{3}$.

Il est intéressant de constater que si la solution $F_N = 0$ est “choisie” (cas où le système se trouve dans le mode indéterminé $\mathcal{M}_4$) ou “imposée” (cas où le système se trouve dans le mode consistant $\mathcal{M}_3$), alors, d'après (II.3),

$$\ddot{\theta} = 0$$

De même, pour le mode consistant $\mathcal{M}_1$ et pour le mode indéterminé $\mathcal{M}_4$, la substitution de la solution $F_N = \dfrac{\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta})}{\mathcal{B}(\theta, \mu)}$ dans (II.3) mène à l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{l}(-\cos\theta + \mu \sin\theta) \frac{g - l\dot{\theta}^2 \sin\theta}{1 + 3\cos\theta(\cos\theta - \mu \sin\theta)} \tag{II.8}$$

qui peut se réécrire, en posant $\mathcal{C}(\theta,\mu) = \dfrac{3}{ml}(-\cos\theta + \mu\sin\theta)$

$$\ddot{\theta} = \mathcal{C}(\theta,\mu)\frac{\mathcal{A}(\theta,\dot{\theta})}{\mathcal{B}(\theta,\mu)} \tag{II.9}$$

Cette équation différentielle, fortement non linéaire, sera au coeur de nos analyses futures.
Posons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\theta}_{c1}^{\pm} & = & \pm\sqrt{\dfrac{g}{l\sin\theta_{c1}}} \\ \dot{\theta}_{c2}^{\pm} & = & \pm\sqrt{\dfrac{g}{l\sin\theta_{c2}}} \end{array}\right.$$

Définition II.3

Nous appellerons points singuliers du LCP (II.4) les points

$$P_{c1}^{\pm} = \begin{pmatrix} \theta_{c1} \\ \dot{\theta}_{c1}^{\pm} \end{pmatrix} \textit{ et } P_{c2}^{\pm} = \begin{pmatrix} \theta_{c2} \\ \dot{\theta}_{c2}^{\pm} \end{pmatrix}$$

La figure II.2 illustre, pour le cas $\mu = 1.4$, les modes associés du LCP (II.4) ainsi que la direction du champ de vecteur dans les différentes régions.

3.2 Représentation du cône de frottement dans l'espace de configuration

La contrainte cinématique de non-pénétration dans le sol est représentée par une hyper-surface dans l'espace des configurations. Aussi peut-il paraître intéressant d'étudier la transposition de cette contrainte dans l'espace des forces généralisées accompagnant l'espace des configurations, comme le propose Erdmann [Erdmann, 1994]. L'idée est de réécrire la dynamique du mouvement (II.2) sous la forme

$$\ddot{q} = F_N n_q + F_T t_q + F_e$$

sous la contrainte $0 \leq\mid F_T \mid\leq \mu F_N$, où $F_e = M^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$ désigne le vecteur des actions extérieures, $M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{ml^2}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice d'inertie du système mé-

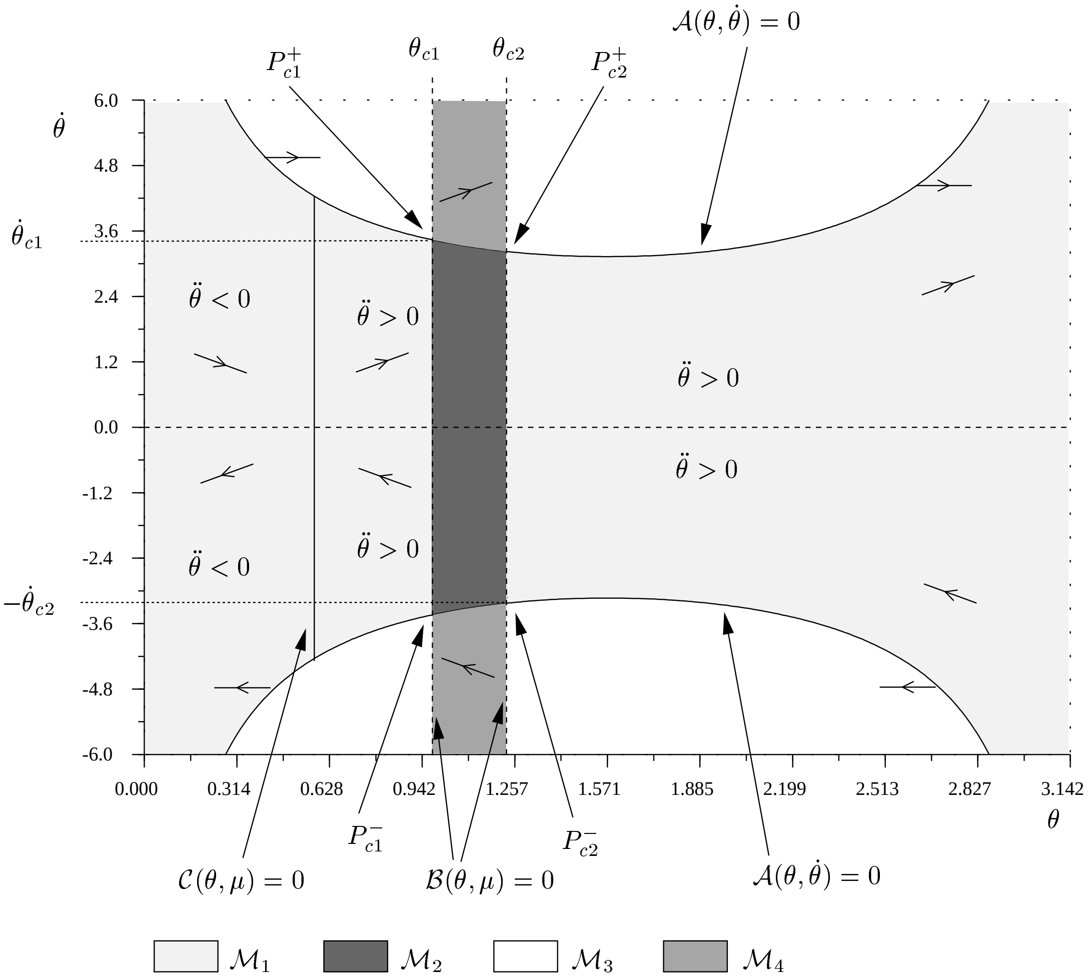

FIG. II.2 – *Les modes du LCP pour $\mu = 1.4$ ($m = 1$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $l = 1$ m)*

canique.
Il est aisé de vérifier à partir de (Σ) que, dans notre cas :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} n_q & = & M^{-1}\nabla F(q) & = & \dfrac{1}{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{3}{l}\cos\theta \end{pmatrix} \\ t_q & = & M^{-1}G(q) & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{3}{l}\sin\theta \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{II.10}$$

On en déduit que les bords du cône de frottement dans l'espace des configurations sont décrits par les vecteurs directeurs :

$$e^{\pm} = n_q \pm \mu t_q = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \pm\mu \\ 1 \\ \frac{3}{l}\left(-\cos\theta \pm \mu \sin\theta\right) \end{pmatrix}$$

Force est de constater que les vecteurs n_q et t_q, images des vecteurs $n_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $t_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans l'espace des configurations, définis dans (II.10), ne sont plus orthogonaux pour la métrique cinétique. De plus, le cône délimité par les droites (q, e^-) et (q, e^+) n'est pas symétrique par rapport à la normale n_q. En d'autres termes, $e^{\pm}$ sont les images de $n_0 \pm \mu t_0$ par l'application $M^{-1}J^T$, où J est la jacobienne entre $(\dot{x}_A, \dot{y}_A)$ et $\dot{q}$.

Introduisons les vecteurs du plan tangent dans la métrique cinétique M :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_r & = & \begin{pmatrix} -l\sin\theta \\ l\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix} \\ t_r^{\perp} & = & \begin{pmatrix} 1 + 3\cos\theta \\ 3\sin\theta\cos\theta \\ \frac{3}{l}\sin\theta \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Il est possible qu'un bord du cône plonge en dessous du plan tangent $(t_r, t_r^{\perp})$ dans la métrique cinétique M.

En effet :

$$n_q^T M e^+ = \frac{1}{m}\left(1 + 3\cos\theta\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right)\right) = \mathcal{B}(\theta, \mu)$$

Or dans le mode de glissement M_{II} que nous étudions, la force de frottement est colinéaire à e^+. D'où le résultat suivant :

Lemme II.1

La force de contact généralisée passe en dessous du plan tangent $(t_r, t_r^{\perp})$ dans la métrique cinétique si et seulement si $\mu \geq \frac{4}{3}$ et $\theta_{c1}(\mu) < \theta < \theta_{c2}(\mu)$.

Démonstration

Ce résultat est immédiat à partir de l'analyse sur le signe de $\mathcal{B}(\theta, \mu)$ faite précédemment. ◇

Remarques

– La figure II.3 illustre l'évolution du cône de frottement généralisé avec θ pour $\mu = 1.6$ ($l = 1$ m, $m = 1$ kg).

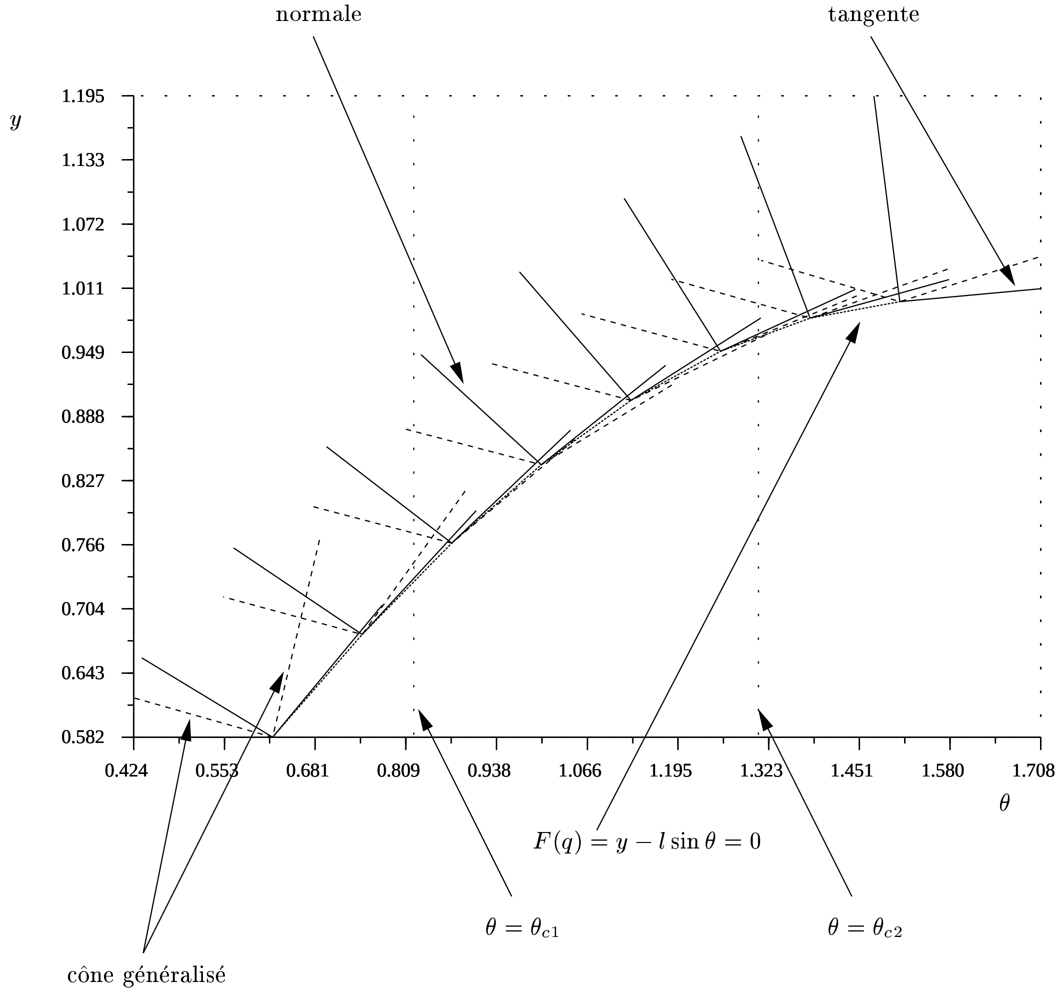

FIG. II.3 – *L'évolution du cône de frottement généralisé pour $\mu = 1.6$ ($l = 1$ m, $m = 1$ kg)*

– Erdmann [Erdmann, 1994] commente que le problème de détermination de la force de contact dans le cas où le cône généralisé passe en dessous du plan tangent, est alors mal-posé, ce que nous avons illustré plus haut. En effet, cela signifie qu'en présence d'un coefficient de frottement suffisamment élevé, le contact serait capable de résister à une force extérieure orientée vers l'extérieur de la surface de contact, c'est-à-dire, visant à faire décoller la barre, ce qui peut paraître pour le moins étrange.

Dans la suite, nous commencerons par prouver que la solution $F_N = 0$, valable dans les modes $\mathcal{M}_3$ et $\mathcal{M}_4$, implique le décollage instantané de la barre, et donc, une transition vers le mode M_I du système hybride. Puis, nous discuterons de l'indétermination dans le mode $\mathcal{M}_4^+$ et nous prouverons que, si l'on choisit comme solution $F_N(t) = \dfrac{\mathcal{A}(t)}{\mathcal{B}(t)}$, alors la barre finit par s'arrêter de glisser et décolle au même instant, avant d'atteindre la singularité $\theta = \theta_{c2}$. Une étude similaire nous permettra de prouver que dans les modes $\mathcal{M}_1^+$ et $\mathcal{M}_4^-$, le système sort du mode au plus tard en coupant la courbe $\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta}) = 0$. Soit $t_{\mathcal{A}}$ cet instant. Nous prouverons alors que, dans le mode $\mathcal{M}_1^+$, si $\left(\theta(t_{\mathcal{A}}), \dot{\theta}(t_{\mathcal{A}})\right)^T \neq P_{c1}^+$, alors la barre décolle à l'instant $t_{\mathcal{A}}$. Pour le mode $\mathcal{M}_4^-$, si $\left(\theta(t_{\mathcal{A}}), \dot{\theta}(t_{\mathcal{A}})\right)^T \neq P_{c1}^-$, seul un impact sans collision pourra éviter de rentrer dans le mode inconsistant $\mathcal{M}_2^-$. Nous continuerons par une étude détaillée des points singuliers P_{c1}^+ et P_{c1}^- atteignables par le mode $\mathcal{M}_1^+$ et $\mathcal{M}_4^-$ respectivement, pour traiter le cas où $\left(\theta(t_{\mathcal{A}}), \dot{\theta}(t_{\mathcal{A}})\right)^T \in \left\{P_{c1}^+, P_{c1}^-\right\}$; à la vue des champs de vecteurs, il est facile de comprendre que les points singuliers P_{c2}^+ et P_{c2}^- sont inatteignables à partir des autres modes du LCP. Cette étude nous permettra de conclure quant aux transitions possibles à partir de ces deux modes.

4 Discussion sur l'indétermination du mode $\mathcal{M}_4^+$

Nous commencerons par prouver le résultat suivant :

Proposition II.1

Supposons que $\exists\, t_1 \mid X(t_1) \in \mathcal{M}_3 \bigcup \mathcal{M}_4$.
Si $F_N(t_1) = 0$, *alors* $\ddot{y}_A(t_1) > 0$.

Démonstration

On a $\mathcal{A}(t_1) < 0$ car $X(t_1) \in \mathcal{M}_3 \bigcup \mathcal{M}_4$. Or d'après (II.4), $\ddot{y}_A(t_1) = -\mathcal{A}(t_1)$ d'où le résultat. $\diamond$

Hypothèse II.2

Nous supposerons que $\exists\, t_1 \mid X(t_1) \in \mathcal{M}_4^+$.

Lemme II.2

Si l'on choisit $F_N(t) = \dfrac{\mathcal{A}(t)}{\mathcal{B}(t)}$ *comme solution pour* $t \geq t_1$ *tout en supposant que* $\dot{x}_A(t) < 0,\ \forall t \geq t_1$*, alors le système s'échappe en temps fini vers des vitesses infinies.*

Démonstration

Il est immédiat que $\mathcal{C}(\theta, \mu) = \dfrac{3m}{l}(-\cos\theta + \mu \sin\theta) > 0$ pour $\arctan\dfrac{1}{\mu} < \theta < \pi$, donc $\ddot{\theta} = \mathcal{C}(\theta, \mu)\dfrac{\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta})}{\mathcal{B}(\theta, \mu)} > 0$ est vrai tant que l'état demeure dans $\mathcal{M}_4^+$, car

$$\arctan\frac{1}{\mu} < \theta_{c1} < \theta(t) \leq \theta_{c2},\ \ \forall t \geq t_1$$

En conséquence, $\dot{\theta}(t)$ est une fonction du temps strictement croissante, sous la même condition. Il en va naturellement de même pour $\theta(t)$ étant donné que $\dot{\theta}(t_1) > 0$. Finalement, on en déduit que la seule solution pour sortir de $\mathcal{M}_4^+$ est de couper la droite verticale $\theta = \theta_{c2}$.
Supposons maintenant que $\dot{\theta}(t) \leq M < +\infty, \forall t \geq t_1$ avec $\theta(t) < \theta_{c2}$, c'est-à-dire que $\dot{\theta}(t)$ reste bornée. Il existe donc $t_{c2} > t_1$ tel que $\theta(t_{c2}) = \theta_{c2}$. Notre but est de prouver que $\lim_{t \to t_{c2}^-} \dot{\theta}(t) = +\infty$, d'où une contradiction avec l'hypothèse précédente.
Posons $F(t) = 2\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t)$ qui est bien définie en tant que produit de deux fonctions continuement différentiables pour $t_1 \leq t < t_{c2}$. En conséquence $G(t) = \int_{t_1}^{t} F(\tau)d\tau$ est définie sur le même domaine. Plus précisément :

$$G(t) = \dot{\theta}^2(t) - \dot{\theta}^2(t_1) \tag{II.11}$$

Regardons maintenant l'expression de $\ddot{\theta}(t)$, donnée dans (II.9), plus en détails :

- $\mathcal{C}(\theta(t), \mu)$ est une fonction continue et $\exists K_{\mathcal{C}} > 0 \,|\, \forall \theta \in [\theta(t_1), \theta_{c2}], \mathcal{C}(\theta, \mu) \geq K_{\mathcal{C}}$,
- $\mathcal{A}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) < 0,\ \ \forall t \in [t_1, t_{c2})$.
  $\dot{A} = -l\dot{\theta}\left(\dot{\theta}^2 \cos\theta + 2\dot{\theta}\ddot{\theta}\sin\theta\right) < 0$ car $0 < \theta_{c1} < \theta(t) \leq \theta_{c2} < \pi/2$, ce qui signifie encore une fois que l'orbite ne peut couper la courbe $\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta}) = 0$.
  D'où, en posant $K_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(\theta(t_1), \dot{\theta}(t_1)) < 0$, il vient que :

$$\forall t \in [t_0, t_{c2}), \mathcal{A}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \leq K_{\mathcal{A}}$$

De ces deux observations (rappelons que $\mathcal{B}(\theta(t), \mu) < 0$) et en posant $K = 2K_{\mathcal{C}}K_{\mathcal{A}} < 0$, on en déduit que :

$$F(t) \geq K\frac{\dot{\theta}(t)}{\mathcal{B}(\theta, \mu)},\ \ \forall t \in [t_1, t_{c2})$$

D'où

$$G(t) \geq K \int_{t_1}^{t} \frac{\dot{\theta}(t)dt}{\mathcal{B}(\theta,\mu)} = K \int_{\theta(t_1)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{1+3\cos\theta(\cos\theta-\mu\sin\theta)}$$

En utilisant un outil de calcul formel, il est alors facile de voir qu'une primitive de

$$\frac{1}{1+3\cos\theta(\cos\theta-\mu\sin\theta)}$$

est donnée par :

$$L(\theta) = 2\frac{\operatorname{arctanh}\left(\dfrac{-2\tan\theta+3\mu}{\sqrt{9\mu^2-16}}\right)}{\sqrt{9\mu^2-16}}$$

et que $\lim_{\theta\to\theta_{c2}^-} \Re\left(L(\theta)\right) = -\infty$.
La figure II.4 donne le graphe de la fonction $\Re\left(L(\theta)\right)$ pour $\mu = 1.6$.

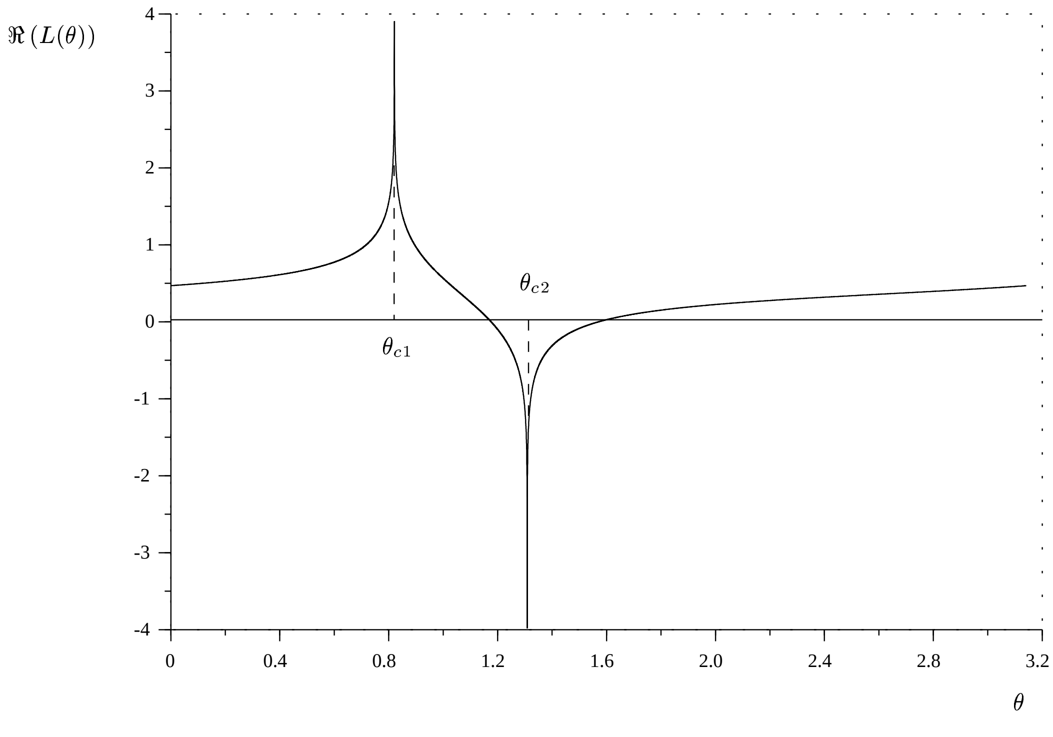

FIG. II.4 – *Graphe de* $\Re\left(L(\theta)\right)$, $\mu = 1.6$

De (II.11) et comme $K < 0$, on en déduit que $\lim_{\theta\to\theta_{c2}^-} \dot{\theta} = +\infty$, achevant la démonstration. $\diamond$

Lemme II.3

Si l'on choisit $F_N(t) = \dfrac{\mathcal{A}(t)}{\mathcal{B}(t)}$ *pour* $t \geq t_1$*, alors le point* A *s'arrête de glisser à* t^* *avec* $\theta(t^*) < \theta_{c2}$ *et la barre décolle au même instant.*

Démonstration

Supposons que l'on choisisse cette solution à partir de l'instant t_1 et que le système demeure dans le mode $\mathcal{M}_4^+$. D'après le lemme II.2, nous savons que la solution $F_N = \dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ est inacceptable d'un point de vue énergétique. Plus précisément, notons $E_m(t)$ l'énergie mécanique du système constitué de la barre. Comme la seule action agissant sur la barre effectuant un travail est la force tangentielle $F_T = \mu F_N$, il vient que $\dot{E}_m(t) = \mu F_N(t)\dot{x}_A(t)$. $\dot{E}_m(t_1) < 0$, car $\dot{x}_A(t) < 0$ et $F_N(t) > 0$ (le système est dissipatif).
D'où d'après le lemme II.2, $\exists\, t_2 > t_1 \mid E_m(t_2) = E_m(t_1)$ et $X(t_2) \in \mathcal{M}_4^+$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\, t^* \in]t_1, t_2] \mid \dot{E}(t^*) = 0$. On en déduit que $\dot{x}_A(t^*) = 0$.
En conséquence, la barre entre à l'instant t^* dans le mode M_{IV} du système hybride. Comme dit dans la sous-section 2, Lötstedt [Lötstedt, 1981] a prouvé que dans ce mode, il existe toujours une solution unique au problème de détermination de la force de contact. Or $F_N(t^*) = 0$ est solution, étant donné que $\ddot{y}_A(t^*) = -A(t^*) > 0$, achevant la démonstration. ◇

Proposition II.2

- *Si l'on choisit à un instant* $t \geq t_1$ *la solution* $F_N(t) = 0$*, la barre décolle à l'instant* t_1*.*
- *Si l'on choisit* $F_N(t) = \dfrac{\mathcal{A}(t)}{\mathcal{B}(t)}$*, pour* $t \geq t_1$*, alors le point* A *finit par arrêter de glisser et décolle au même instant.*

Démonstration

Evidente à partir de la proposition II.1 et du lemme II.3. ◇

Conclusions

- Si l'on choisit comme solution $F_N(t) = \dfrac{\mathcal{A}(t)}{\mathcal{B}(t)}$, pour $t \geq t_1$, alors le système quitte le mode M_{II} (et en conséquence le mode $\mathcal{M}_4^+$) à l'instant t^* et se retrouve à la frontière entre les modes M_I et M_{IV} pour finalement entrer dans le mode M_I.

- Il existe une infinité de trajectoires admissibles à partir de l'instant t_1. En effet, à tout instant t tel que $t_1 \leq t < t^*$, on a le choix entre la solution $F_N = 0$ et la solution $F_N = \dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$. Ceci est très gênant du point de vue de la simulation, à moins que l'échappement soit très rapide.
- Une démonstration similaire à celle du lemme II.2 (que nous ne détaillerons pas ici) permet de prouver que la droite verticale $\theta = \theta_{c2}$ ne peut être atteinte à partir du mode $\mathcal{M}_1^-$.

5 Etude des transitions possibles à partir des modes $\mathcal{M}_1^+$ et $\mathcal{M}_4^-$

Dans un premier temps, nous prouverons que les orbites ne peuvent pas traverser la droite $\theta = \theta_{c1}$, à part aux points singuliers P_{c1}^+ et P_{c1}^-. Puis, nous effectuerons une étude détaillée de ces deux points.

5.1 Comportement des orbites au voisinage de $\theta = \theta_{c1}$

Hypothèse II.3

Nous supposerons que $\exists\, t_1 \mid X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+ \cup \mathcal{M}_4^-$.

A la base, dans le mode $\mathcal{M}_1^+$, $\dot{\theta} > 0$ et, si $\theta(t_1) < \theta_{c1}$, alors $\mathcal{B}(\theta, \mu)$ est décroissante vers 0. Dans le mode $\mathcal{M}_4^-$, $\dot{\theta} < 0$ et $\mathcal{B}(\theta, \mu)$ est croissante vers 0.
A ce stade, Pfeiffer et Glocker [Pfeiffer et al., 1996] affirment que la force de contact $F_N(t) = \dfrac{\mathcal{A}(t)}{\mathcal{B}(t)}$ tend vers des valeurs infinies : on parle alors d'*impact sans collision* ("Impact WithOut Collision", IW/OC). Ils concluent que, étant donné que les forces infinies n'existent pas dans la nature, ce phénomène est dû à une incompatibilité entre la loi de frottement d'Amontons-Coulomb et la théorie des corps rigides. Ils proposent de rejeter l'hypothèse des corps rigides, en argumentant qu'aucun corps ne demeure rigide sous l'action de forces infinies, voir aussi [Neimark, 1995]. Mason et Wang [Mason et al., 1988], de leur côté, disent qu'il s'agit d'une inconsistance de la mécanique des corps rigides avec frottement et qui mène à un impact sans collision.
Notre but est de prouver qu'un tel phénomène n'a pas lieu systématiquement, c'est-à-dire que selon la vitesse de glissement au voisinage du point singulier $P_{c1}^{\pm}$, soit la

force de contact demeure bornée, soit elle tend vers des valeurs infinies mais l'impulsion demeure quant à elle bornée.

Il convient de remarquer dans un premier temps que, si $X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$ et $\theta(t_1) > \theta_{c2}$, alors, à la vue de l'orientation du champ de vecteur, le système ne peut revenir vers la singularité $\theta = \theta_{c2}$. En conséquence, pour l'étude du mode $\mathcal{M}_1^+$, nous nous limiterons au seul cas intéressant, à savoir $\theta(t_1) < \theta_{c1}$.

Lemme II.4

Si l'on suppose que $\dot{x}_A(t) < 0,\ \forall t \geq t_1$, *et que* $\arctan \dfrac{1}{\mu} < \theta(t_1) < \theta_{c1}$ *dans le cas où* $X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$, *alors*

$$\exists\, t_{\mathcal{A}} > t_1 \mid \mathcal{A}(\theta(t_A), \dot{\theta}(t_A)) = 0 \ \textit{et} \ \begin{cases} \theta(t_{\mathcal{A}}) \leq \theta_{c1} & \textit{si} \quad X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+ \\ \theta(t_{\mathcal{A}}) \geq \theta_{c1} & \textit{si} \quad X(t_1) \in \mathcal{M}_4^- \end{cases}$$

Démonstration

La démonstration se base sur un raisonnement par l'absurde, du même style que celui de la démonstration du lemme II.2.
La condition $\theta(t_1) > \arctan \dfrac{1}{\mu}$ est toujours vérifiée dans le mode $\mathcal{M}_4^-$.
En conséquence, $\mathcal{C}(\theta(t), \mu) > 0$ et donc $\ddot{\theta}(t) > 0, \forall t \geq t_1$, tant que le système reste dans $\mathcal{M}_1^+ \bigcup \mathcal{M}_4^-$. En conséquence, sous la même condition, $\dot{\theta}(t)$ est une fonction strictement croissante du temps. On en déduit que si la barre ne s'arrête pas de glisser, le seul moyen de quitter $\mathcal{M}_1^+ \bigcup \mathcal{M}_4^-$ est de croiser l'une des deux courbes $\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta}) = 0$ ou $\mathcal{B}(\theta, \mu) = 0$ (ou bien les deux).
Supposons que le point A ne s'arrête pas de glisser et que

$$\exists\, K_A \begin{cases} K_{\mathcal{A}} > 0 \text{ et } \forall t \geq t_1, \mathcal{A}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \geq K_{\mathcal{A}}, & \text{si} \quad X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+ \\ K_{\mathcal{A}} < 0 \text{ et } \forall t \geq t_1, \mathcal{A}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \leq K_{\mathcal{A}}, & \text{si} \quad X(t_1) \in \mathcal{M}_4^- \end{cases}$$

On peut remarquer que, dans le cas où $X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$, on a

$$K_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(\theta_{c1}, \dot{\theta}(t_{c1}))$$

car $\dot{A} = -l\dot{\theta}\left(\dot{\theta}^2 \cos\theta + 2\dot{\theta}\ddot{\theta}\sin\theta\right) < 0$.
L'hypothèse précédente revient à supposer que de l'orbite ne coupe pas la courbe $A(\theta, \dot{\theta}) = 0$. Il est immédiat que cette dernière entraîne que $\dot{\theta}(t)$ reste bornée tant que le système reste dans le mode $\mathcal{M}_1^+ \bigcup \mathcal{M}_4^-$. Il existe donc $t_{c1} > t_1$ tel que $\theta(t_{c1}) = \theta_{c1}$.
On sait que $\exists\, K_{\mathcal{C}} > 0 \mid \mathcal{C}(\theta, \mu) > K_{\mathcal{C}}, \forall\theta \in [\theta(t_1), \theta_{c1}]$.

En utilisant la fin de la démonstration du lemme II.2, on a aboutit de la même manière à une contradiction.
On en conclut l'existence de l'instant $t_{\mathcal{A}}$ recherché. $\diamond$

Le problème est maintenant de décider si l'orbite coupe la courbe $\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta}) = 0$ avant que $\theta(t) = \theta_{c1}$.

Lemme II.5

$$Si\ \exists\, t_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}(t_{\mathcal{A}}) = 0\ et \begin{cases} \theta(t_{\mathcal{A}}) \leq \theta_{c1} & si \quad X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+ \\ \theta(t_{\mathcal{A}}) \geq \theta_{c1} & si \quad X(t_1) \in \mathcal{M}_4^- \end{cases},\ alors$$

- *si $X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$, alors la barre quitte le mode $\mathcal{M}_1^+$ pour entrer dans le mode $\mathcal{M}_3^+$ et décolle,*
- *si $X(t_1) \in \mathcal{M}_4^-$, alors un impact sans collision est nécessaire pour ne pas entrer dans le mode inconsistant $\mathcal{M}_2^-$.*

Démonstration

A $t_{\mathcal{A}}$, le système se trouve à la frontière entre les modes $\mathcal{M}_1^+$ et $\mathcal{M}_3^+$ si $X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$, ou bien sur celle entre les modes $\mathcal{M}_4^-$ et $\mathcal{M}_2^-$, si $X(t_1) \in \mathcal{M}_4^-$.
On a $F_N(t_{\mathcal{A}}) = \dfrac{\mathcal{A}(t_{\mathcal{A}})}{\mathcal{B}(t_{\mathcal{A}})} = 0$, car par hypothèse $\mathcal{B}(t_{\mathcal{A}}) \neq 0$, et $\ddot{y}_A(t_{\mathcal{A}}) = -\mathcal{A}(t_{\mathcal{A}}) + \mathcal{B}(t_{\mathcal{A}})F_N(t_{\mathcal{A}}) = 0$. On ne sait donc pas, a priori, si la barre décolle ou non. Or $\dot{\mathcal{A}}(t_{\mathcal{A}}) = -l\dot{\theta}^2(t_{\mathcal{A}}) \cos\theta(t_{\mathcal{A}}) < 0$ donc $\mathcal{A}(t_{\mathcal{A}}^+) < 0$ et, par conséquent, $X(t_{\mathcal{A}}^+) \in \mathcal{M}_3^+$, si $X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$, et $X(t_{\mathcal{A}}^+) \in \mathcal{M}_2^-$, si $X(t_1) \in \mathcal{M}_4^-$.
La proposition II.2 permet alors de conclure que la barre décolle si $X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$. $\diamond$

Remarque

Il aurait été tentant d'essayer la solution $F_N(t_{\mathcal{A}}^+) = 0$, à la frontière des modes $\mathcal{M}_4^-$ et $\mathcal{M}_2^-$, dans l'espoir de transiter vers le mode M_I du système hybride. Mais donc ce cas, on aurait $\ddot{y}_{\mathcal{A}}(t_{\mathcal{A}}^+) = -\mathcal{A}(t_{\mathcal{A}}^+) < 0$ (on est rentré dans le mode $\mathcal{M}_2^-$), ce qui est impossible.

Conclusion

Nous sommes confrontés à une équation différentielle ordinaire $\dfrac{dx}{dt} = f(x,t)$ où $f(x,t)$ diverge sur un certain sous-espace $\mathcal{D}$ de l'espace d'état. Néanmoins l'étude précédente nous permet de comprendre que notre cas ne tombe pas dans le cadre des résultats récents de Filipov [Filipov, 1996] sur ce type de système. En effet, Filipov fait l'hypothèse que les solutions soit rebondissent sur, soit traversent le sous-espace singulier $\mathcal{D}$, alors que dans notre cas, le champ de vecteur est clairement vertical, c'est-à-dire parallèle au sous-espace singulier. Il reste néanmoins à étudier le cas où $\left(\theta(t_{\mathcal{A}}), \dot{\theta}(t_{\mathcal{A}})\right)^T$ est un des points singuliers P_{c1}^+ ou P_{c1}^-.

5.2 Etude des points singuliers

Nous nous cantonnerons à l'étude des points P_{c1}^+ et P_{c1}^-, seuls points singuliers atteignables tant que le système demeure dans le mode M_{II} du système hybride.

Hypothèse II.4

On supposera que $\exists\, t_{c1} \mid \left(\theta(t_{c1}), \dot{\theta}(t_{c1})\right)^T = P_{c1} \in \left\{P_{c1}^-, P_{c1}^+\right\}$ *et que ce point est atteint par la solution* $F_N(t) = \dfrac{\mathcal{A}(t)}{\mathcal{B}(t)}$.

A la vue de la direction des champs de vecteurs (Fig. II.2), il est immédiat que

- si $P_{c1} = P_{c1}^+$, alors $X(t_{c1}^-) \in \mathcal{M}_1^+$,
- si $P_{c1} = P_{c1}^-$, alors $X(t_{c1}^-) \in \mathcal{M}_4^-$.

Le but de cette étude est de déterminer si $\lim_{t \to t_{c1}^-} F_N(t) = \dfrac{\mathcal{A}(t)}{\mathcal{B}(t)}$ existe et est finie ou infinie.
Comme $\mathcal{C}(\theta(t), \mu)$ est une fonction bornée positive au voisinage de P_{c1}, de (II.9) on voit que l'existence de cette limite est équivalente à celle de $\lim_{t \to t_{c1}^-} \ddot{\theta}(t)$.

Posons $x_1(t) = \theta(t)$ et $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$.
L'équation différentielle (II.9) peut se réécrire sous la forme du système d'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{dx_1}{dt} & = & x_2 & \text{(a)} \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & \mathcal{C}(x_1, \mu)\dfrac{\mathcal{A}(x_1, x_2)}{\mathcal{B}(x_1, \mu)} & \text{(b)} \end{array} \right. \tag{II.12}$$

Remarquons d'abord que, dans tout voisinage du point singulier P_{c1} privé de ce point, l'équation (b) de ce système peut s'écrire de manière équivalente

$$\mathcal{B}(x_1, \mu)\frac{dx_2}{dt} = \mathcal{C}(x_1, \mu)\mathcal{A}(x_1, x_2)$$

5.2.1 Changement d'échelle de temps

Il paraît tentant d'effectuer le changement d'échelle de temps

$$\frac{dt}{ds} = \mathcal{B}(x_1, \mu) \tag{II.13}$$

Ce changement est valable s'il est bijectif, ce qui est garanti par le fait que $\mathcal{B}(x_1, \mu)$ garde un signe constant, positif ou négatif suivant que le système atteint P_{c1}^+ (en venant du mode $\mathcal{M}_1^+$) ou P_{c1}^- (en venant du mode $\mathcal{M}_4^-$).

Le système (II.12) est alors équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx_1}{ds} & = & \mathcal{B}(x_1, \mu) x_2 \\ \dfrac{dx_2}{ds} & = & \mathcal{C}(x_1, \mu) \mathcal{A}(x_1, x_2) \\ \dfrac{dt}{ds} & = & \mathcal{B}(x_1, \mu) \end{array} \right. \tag{II.14}$$

5.2.2 Détermination de $\lim_{t \to t_{c1}^-} s(t)$

Soit $t_1 < t_{c1} \mid X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$ si $P_{c1} = P_{c1}^+$ et $X(t_1) \in \mathcal{M}_4^+$ si $P_{c1} = P_{c1}^-$. Soit $H(t) = \displaystyle\int_{t_1}^{t} \frac{\dot{\theta}(\tau) d\tau}{\mathcal{B}(\theta(\tau), \mu)}$.
On a :

$$H(t) = \int_{\theta(t_1)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{1 + 3\cos\theta\,(\cos\theta - \mu \sin\theta)}$$

En utilisant un outil de calcul formel, il est facile de voir qu'une primitive générale de

$$\frac{1}{1 + 3\cos\theta\,(\cos\theta - \mu \sin\theta)}$$

est donnée par :

$$L(\theta) = 2 \frac{\operatorname{arctanh}\left(\dfrac{-2\tan\theta + 3\mu}{\sqrt{9\mu^2 - 16}} \right)}{\sqrt{9\mu^2 - 16}}$$

et que

$$\lim_{\theta \to \theta_{c1}^{\pm}} \Re\left(L(\theta)\right) = +\infty$$

D'où

$$\lim_{t \to t_{c1}^-} H(t) = +\infty$$

Du changement d'échelle (II.13), il vient que

$$H(t) = \int_{t_1}^{t} \dot{\theta}(\tau)\dot{s}(\tau)d\tau$$

Sachant que, $\dot{\theta}(\tau)$ reste bornée, non nulle, sur $[t_1, t_{c1}]$, ($\dot{\theta}(\tau) \geq \delta > 0$ au voisinage de P_{c1}^+ et $\dot{\theta}(\tau) \leq \delta < 0$ au voisinage de P_{c1}^-), on déduit finalement que

Lemme II.6

- *Si* $P_{c1} = P_{c1}^+$, *alors* $\lim_{t \to t_{c1^-}} s(t) = +\infty$.
- *Si* $P_{c1} = P_{c1}^-$, *alors* $\lim_{t \to t_{c1^-}} s(t) = -\infty$.

5.2.3 Linéarisation locale du système (II.14) autour de P_{c1}

Notons $Y(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ t(s) \end{pmatrix}$ la variable d'état du nouveau système (II.14) que l'on peut écrire sous la forme compacte

$$\frac{dY}{ds} = F(Y) \tag{II.15}$$

La clef de notre analyse réside dans le fait que $Y_{c1}^{\pm} = \begin{pmatrix} \theta_{c1} \\ \dot{\theta}_{c1}^{\pm} \\ t_{c1} \end{pmatrix}$ sont des *points d'équilibre* de (II.15), c'est-à-dire que $F(Y_{c1}^{\pm}) = 0$.
Le modèle linéarisé local autour de $Y_{c1}^{\pm}$ est donné par

$$\frac{dY}{ds} = A^{\pm}(Y - Y_{c1}^{\pm}) \tag{II.16}$$

où

$$A^{\pm} = \frac{\partial F}{\partial Y}(Y_{c1}^{\pm}) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\pm} & 0 & 0 \\ \alpha_2^{\pm} & \alpha_3^{\pm} & 0 \\ \alpha_4^{\pm} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{II.17}$$

avec, après simplifications,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1^{\pm} & = & \dfrac{\partial \mathcal{B}}{\partial \theta}(\theta_{c1}, \mu)\dot{\theta}_{c1}^{\pm} = \dfrac{3\dot{\theta}_{c1}^{\pm}}{m}\left(\mu - 2\cos\theta_{c1}\left(\sin\theta_{c1} + \mu\cos\theta_{c1}\right)\right) \\ \alpha_2^{\pm} & = & \mathcal{C}(\theta_{c1}, \mu)\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial \theta}(\theta_{c1}, \dot{\theta}_{c1}^{\pm}) = -\dfrac{\dot{\theta}_{c1}^{2}}{m} \\ \alpha_3^{\pm} & = & \mathcal{C}(\theta_{c1}, \mu)\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial \dot{\theta}}(\theta_{c1}, \dot{\theta}_{c1}^{\pm}) = \dfrac{6}{m}\left(\cos\theta_{c1} - \mu\sin\theta\right)\dot{\theta}_{c1}^{\pm}\sin\theta_{c1} \\ \alpha_4^{\pm} & = & \dfrac{\partial \mathcal{B}}{\partial \theta}(\theta_{c1}, \mu) = \dfrac{3}{m}\left(\mu - 2\cos\theta_{c1}\left(\sin\theta_{c1} + \mu\cos\theta_{c1}\right)\right) \end{array} \right. \tag{II.18}$$

L'évolution de ces différentes grandeurs en fonction du coefficient de frottement sont représentées dans les figures II.5 et II.6 pour $P_{c1} = P_{c1}^+$ et $P_{c1} = P_{c1}^-$ respectivement.

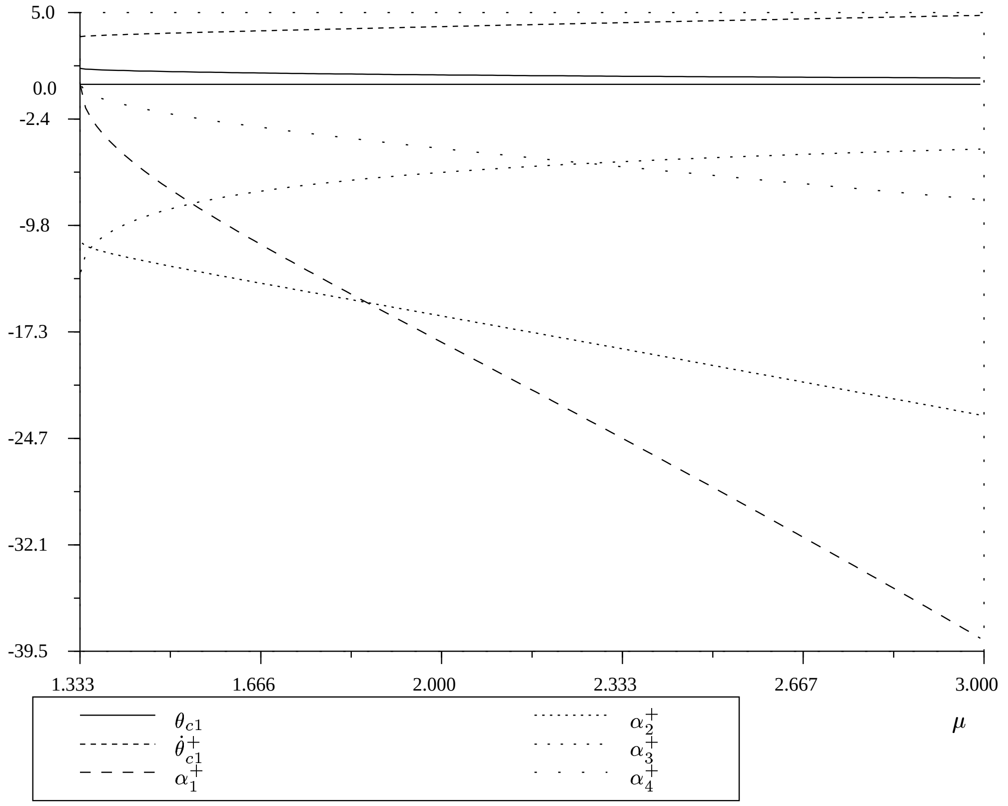

FIG. II.5 – *Visualisation des courbes caractéristiques pour P_{c1}^+ en fonction du coefficient de frottement ($m = 1$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $l = 1m$)*

5.2.4 Etude de stabilité autour de P_{c1}

Il est aisé de voir que les valeurs propres de la jacobienne $A^{\pm}$ donnée dans (II.17) sont $\left\{0, \alpha_1^{\pm}, \alpha_3^{\pm}\right\}$. On sait que :

- $\operatorname{sgn}(\alpha_1^{\pm}(\mu)) = \mp 1, \;\; \forall \mu > \dfrac{4}{3}$,
- $\alpha_1^{\pm}(\dfrac{4}{3}) = 0$,

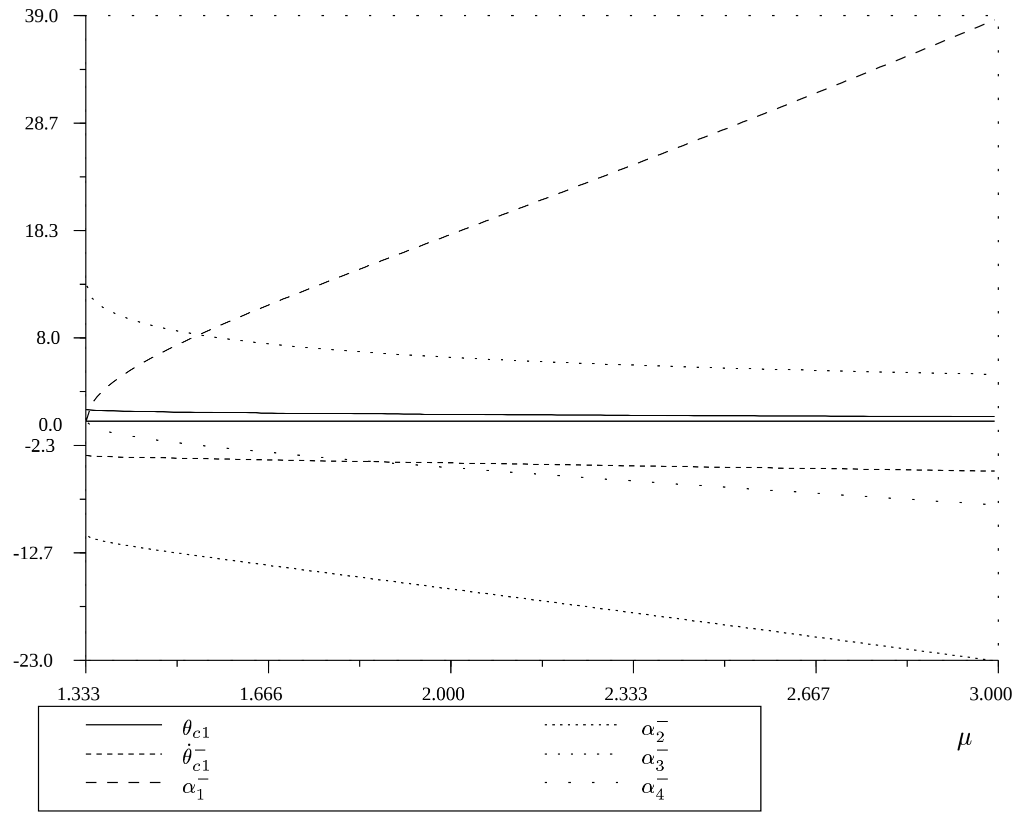

FIG. II.6 – *Visualisation des courbes caractéristiques pour P_{c1}^- en fonction du coefficient de frottement ($m = 1\ kg$, $g = 9.8\ m/s^2$, $l = 1m$)*

– $\mathrm{sgn}(\alpha_3^\pm(\mu)) = \mp 1, \ \forall \mu \geq \dfrac{4}{3}$.

Comme $A^\pm$ a 0 comme valeur propre, nous ne pouvons conclure directement quant à la stabilité ou l'instabilité du système non-linéaire (II.15).

– Cas $\mu > \dfrac{4}{3}$.

Dans ce cas, $A^\pm$ a trois valeurs propres distinctes : $0, \alpha_1^\pm, \alpha_3^\pm$.
Effectuons d'abord la translation $\tilde{Y} = Y - Y_{c1}^\pm$ afin d'effectuer une étude autour de l'origine. Le système non-linéaire (II.15) s'écrit sous la forme

$$\dot{\tilde{Y}} = A^\pm \tilde{Y} + \left(F(\tilde{Y} + Y_{c1}^\pm) - A^\pm \tilde{Y}\right) = A^\pm \tilde{Y} + \tilde{f}(\tilde{Y}) \qquad \text{(II.19)}$$

Soit $J^\pm$ la forme de jordan de la matrice $A^\pm$ et $P^\pm$ la matrice du changement de variable associé : $P^{\pm T} A^\pm P^\pm = J^\pm$.

On a :

$$J^\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^\pm \end{pmatrix}$$

et

$$P^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{\alpha_1^\pm}{\alpha_4^\pm} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{\alpha_3^\pm - \alpha_1^\pm}{\alpha_2^\pm} & 0 \end{pmatrix}$$

Effectuons le changement de variable :

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = P^\pm \tilde{Y}, \;\; y \in \mathbf{R}, \;\; z \in \mathbf{R}^2$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & \tilde{Y}_1 - \dfrac{\alpha_1^\pm}{\alpha_4^\pm}\tilde{Y}_3 \\ z_1 & = & \tilde{Y}_1 \\ z_2 & = & \tilde{Y}_1 - \dfrac{\alpha_1^\pm - \alpha_3^\pm}{\alpha_2^\pm}\tilde{Y}_2 \end{array} \right.$$

(II.19) s'écrit alors, après simplifications :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{y} & = & \dfrac{\alpha_2^\pm}{\alpha_1^\pm - \alpha_3^\pm}\mathcal{B}\left(\theta_{c1} + z_1, \mu\right)\left(z_1 - z_2\right) \\ \dot{z}_1 & = & \alpha_1^\pm z_1 + \mathcal{B}\left(\theta_{c1} + z_1, \mu\right)\left(\dot{\theta}_{c1}^\pm + \dfrac{\alpha_2^\pm}{\alpha_1^\pm - \alpha_3^\pm}\left(z_1 - z_2\right)\right) \\ \dot{z}_2 & = & \alpha_3^\pm z_2 + \mathcal{B}\left(\theta_{c1} + z_1, \mu\right)\left(\dot{\theta}_{c1} + \dfrac{\alpha_2^\pm}{\alpha_1^\pm - \alpha_3^\pm}\left(z_1 - z_2\right)\right) - \\ & & \mathcal{A}\left(\theta_{c1} + z_1, \dot{\theta}_{c1}^\pm + \dfrac{\alpha_2^\pm}{\alpha_1^\pm - \alpha_3^\pm}(z_1 - z_2)\right)\mathcal{C}\left(\theta_{c1} + z_1, \mu\right)\dfrac{\alpha_1^\pm - \alpha_3^\pm}{\alpha_2^\pm} \end{array} \right. \tag{II.20}$$

Considérons la variété $z = h(y) = 0$.
Il est immédiat que cette variété est invariante par (II.20) et que $h(0) = 0$; $\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$. En conséquence, $z = 0$ est une *variété centrale* pour (II.20).
L'évolution du système le long de cette variété centrale est définie par $\dot{y} = 0$.
Ce sous-système est stable au sens de Lyapounov.

D'où, d'après le *principe de réduction* [Khalil, 1996, p. 171], on en déduit finalement le résultat suivant :

Lemme II.7

Si $\mu > \dfrac{4}{3}$, alors le système non-linéaire (II.14) est stable localement autour de P_{c1}.

- Cas où $\mu = \frac{4}{3}$.
Dans ce cas, $A^{\pm}$ n'a qu'une valeur propre non-nulle : $\alpha_3^{\pm}$.
On effectue exactement la même analyse que pour le cas $\mu > \frac{4}{3}$.
La jacobienne donnée dans (II.17) s'écrit

$$A^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2^{\pm} & \alpha_3^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Effectuons la translation $\tilde{Y} = Y - Y_{c1}^{\pm}$ afin d'effectuer une étude autour de l'origine. Le système non-linéaire (II.15) s'écrit sous la forme

$$\dot{\tilde{Y}} = A^{\pm}\tilde{Y} + \left(F(\tilde{Y} + Y_{c1}^{\pm}) - A^{\pm}\tilde{Y}\right) = A^{\pm}\tilde{Y} + \tilde{f}(\tilde{Y}) \qquad \text{(II.21)}$$

Soit $J^{\pm}$ la forme de jordan de la matrice $A^{\pm}$ et $P^{\pm}$ la matrice du changement de variable associé : $P^{\pm T}A^{\pm}P^{\pm} = J^{\pm}$.
On a :

$$J^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^{\pm} \end{pmatrix}$$

et

$$P^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{\alpha_3^{\pm}}{\alpha_2^{\pm}} & 0 \end{pmatrix}$$

Effectuons le changement de variable

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = P^{\pm}\tilde{Y}, \;\; y \in \mathbf{R}^2, \;\; z \in \mathbf{R}$$

On a :

$$\begin{cases} y_1 &= \tilde{Y}_1 \\ y_2 &= \tilde{Y}_3 \\ z &= \tilde{Y}_1 + \dfrac{\alpha_3^{\pm}}{\alpha_2^{\pm}}\tilde{Y}_2 \end{cases}$$

(II.21) s'écrit alors, après simplifications :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{y}_1 & = & \mathcal{B}\left(\theta_{c1}+y_1,\mu\right)\left(\dot{\theta}_{c1}^{\pm}-\dfrac{\alpha_2^{\pm}}{\alpha_3^{\pm}}\left(y_1-z\right)\right) \\ \dot{y}_2 & = & \mathcal{B}\left(\theta_{c1}+y_1,\mu\right) \\ \dot{z} & = & \alpha_3^{\pm}z+\mathcal{B}\left(\theta_{c1}+y_1,\mu\right)\left(\dot{\theta}_{c1}^{\pm}-\dfrac{\alpha_2^{\pm}}{\alpha_3^{\pm}}\left(y_1-z\right)\right)+ \\ & & \mathcal{A}\left(\theta_{c1}+y_1,\dot{\theta}_{c1}^{\pm}-\dfrac{\alpha_2^{\pm}}{\alpha_3^{\pm}}\left(y_1-z\right)\right)\mathcal{C}\left(\theta_{c1}+y_1,\mu\right)\dfrac{\alpha_3^{\pm}}{\alpha_2^{\pm}} \end{array}\right. \tag{II.22}$$

Contrairement au cas où $\mu > \dfrac{4}{3}$, la variété triviale $z = h(y) = 0$ n'est pas invariante par (II.22).
Posons

$$\left\{\begin{array}{lcl} g_1(y,z) & = & \dot{y} \\ g_2(y,z) & = & \dot{z}-\alpha_3^{\pm}z \end{array}\right.$$

Une variété centrale $z = h(y)$ doit vérifier l'équation différentielle partielle [Khalil, 1996, p. 173] :

$$\frac{\partial h}{\partial y}g_1(y,h(y))-\alpha_3^{\pm}h(y)-g_2(y,h(y))=0 \tag{II.23}$$

avec les conditions aux bornes

$$h(0)=0;\ \ \frac{\partial h}{\partial y}(0)=0 \tag{II.24}$$

L'équation (II.23) sous les contraintes (II.24) ne peut être résolue exactement dans le cas présent (car cela impliquerait qu'il existe une solution analytique pour le système (II.22)), mais sa solution peut être approximée de manière arbitrairement proche par une série de Taylor [Khalil, 1996, p. 173].
Notons que :

$$\mathcal{B}\left(\theta_{c1}+y_1,\mu\right)=\frac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial\theta^2}\left(\theta_{c1},\mu\right)y_1^2+O(|y_1|^3)$$

Posons $z = h(y) = O(\|y\|^2)$. Le système réduit est donné par

$$\dot{y}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial\theta^2}\left(\theta_{c1},\mu\right)\dot{\theta}_{c1}^{\pm}y_1^2 \\ \dfrac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial\theta^2}\left(\theta_{c1},\mu\right)y_1^2 \end{pmatrix}+O(\|y\|_2^3) \tag{II.25}$$

Or $a = \dfrac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial\theta^2}\left(\theta_{c1},\mu\right) = \dfrac{10}{m} \neq 0$, donc l'origine du système réduit est instable.
D'où, d'après le *principe de réduction* [Khalil, 1996, p. 171], on en déduit finalement le résultat suivant :

Lemme II.8

Si $\mu = \dfrac{4}{3}$, alors P_{c1} est un point d'équilibre instable pour le système non-linéaire (II.14).

Ce dernier résultat peut paraît très pénalisant quant à l'étude locale du comportement du système autour du point singulier P_{c1}. Néanmoins force est de constater que les orbites qui nous intéressent sont celles pour lesquelles $y_2(s) = \tilde{Y}_3(s) = t(s) - t_{c1} < 0$ et

$$\begin{cases} y_1(s) = \tilde{Y}_1(s) = \theta(s) - \theta_{c1} < 0, \text{ si } P_{c1} = P_{c1}^+ \\ y_1(s) = \tilde{Y}_1(s) = \theta(s) - \theta_{c1} > 0, \text{ si } P_{c1} = P_{c1}^- \end{cases}$$

L'intégration de (II.25) nous livre

$$\begin{cases} y_1(s) &= \dfrac{1}{a\dot{\theta}_{c1}^{\pm}(s_0 - s) + \dfrac{1}{y_1(s_0)}} \\ y_2(s) &= y_2(s_0) - \dfrac{y_1(s_0)}{\dot{\theta}_{c1}^{\pm}} + \dfrac{1}{\dot{\theta}_{c1}^{\pm}\left(a\dot{\theta}_{c1}^{\pm}(s_0 - s) + \dfrac{1}{y_1(s_0)}\right)} \end{cases}$$

On obtient finalement

$$\begin{cases} \lim_{s\to\pm\infty} \theta(s) = \theta_{c1}^{\mp} \\ \lim_{s\to\pm\infty} t(s) = \left(t(s_0) - \dfrac{\theta(s_0) - \theta_{c1}}{\dot{\theta}_{c1}^{\pm}}\right)^{\mp} \end{cases}$$

Puisque ce résultat est vrai sur la variété centrale, on en déduit que toutes les orbites passent par le point P_{c1}.

5.2.5 Détermination de $\lim_{t\to t_{c1}^-} \ddot{\theta}(t)$

Hypothèse II.5

Nous supposerons dans cette section que $\mu > \dfrac{4}{3}$.

Supposons maintenant qu'à l'instant $t_{\mathcal{V}}$, le système entre dans un voisinage $\mathcal{V}$ de $P_{c1}^{\pm}$ dans lequel la linéarisation précédemment citée est "valable", c'est-à-dire que le système linéaire (II.16) représente correctement le système non-linéaire (II.14). Ce voisinage existe d'après le lemme II.7.

Une première étape consiste à intégrer le modèle linéarisé (II.16).

Posons $Y_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \theta(t_{\mathcal{V}}) \\ \dot{\theta}(t_{\mathcal{V}}) \\ t_{\mathcal{V}} \end{pmatrix}$ et $s(t_{\mathcal{V}}) = 0$. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^{\pm}(s) & = & \theta_{c1} - (\theta_{c1} - \theta_v)\, e^{\alpha_1^{\pm} s} \\ t^{\pm}(s) & = & t_{\mathcal{V}} + \dfrac{\alpha_4^{\pm}}{\alpha_1^{\pm}} \left(\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})\right) \left(1 - e^{\alpha_1^{\pm} s}\right) \end{array} \right. \tag{II.26}$$

De plus,

- si $\alpha_1^{\pm} \neq \alpha_3^{\pm}$:

$$x_2^{\pm}(s) = \dot{\theta}_{c1}^{\pm} - \left(\dot{\theta}_{c1}^{\pm} - \dot{\theta}(t_{\mathcal{V}})\right) e^{\alpha_3^{\pm} s} + \frac{\alpha_2^{\pm}}{\alpha_1^{\pm} - \alpha_3^{\pm}} \left(\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})\right) \left(e^{\alpha_3^{\pm} s} - e^{\alpha_1^{\pm} s}\right) \tag{II.27}$$

- si $\alpha_1^{\pm} = \alpha_3^{\pm}$

$$x_2^{\pm}(s) = \dot{\theta}_{c1}^{\pm} - \left(\dot{\theta}_{c1}^{\pm} - \dot{\theta}(t_{\mathcal{V}}) + \alpha_2^{\pm} \left(\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})\right) s\right) e^{\alpha_1^{\pm} s} \tag{II.28}$$

Nous nous intéressons à $\lim\limits_{t \to t_{c1}^-} \ddot{\theta}^{\pm}(t)$, soit d'après le lemme II.6, à :

$$\lim_{s \to \pm\infty} \ddot{\theta}^{\pm}(s) = \frac{\dfrac{dx_2^{\pm}(s)}{ds}}{\dfrac{dt^{\pm}(s)}{ds}}$$

De (II.26), il vient que

$$\frac{dt^{\pm}}{ds}(s) = -\alpha_4^{\pm} \left(\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})\right) e^{\alpha_1^{\pm} s} \tag{II.29}$$

et, de (II.27) et (II.28)

- si $\alpha_1^{\pm} \neq \alpha_3^{\pm}$

$$\frac{dx_2^{\pm}}{ds}(s) = -\left(\dot{\theta}_{c1}^{\pm} - \dot{\theta}(t_{\mathcal{V}})\right) \alpha_3^{\pm} e^{\alpha_3^{\pm} s} + \frac{\alpha_2^{\pm}}{\alpha_1^{\pm} - \alpha_3^{\pm}} \left(\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})\right) \left(\alpha_3^{\pm} e^{\alpha_3^{\pm} s} - \alpha_1^{\pm} e^{\alpha_1^{\pm} s}\right) \tag{II.30}$$

- si $\alpha_1^{\pm} = \alpha_3^{\pm}$

$$\frac{dx_2^{\pm}}{ds}(s) = -\left(\alpha_1^{\pm} \left(\dot{\theta}_{c1}^{\pm} - \dot{\theta}(t_{\mathcal{V}})\right) + \alpha_2^{\pm} \left(\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})\right) \left(1 + \alpha_1^{\pm} s\right)\right) e^{\alpha_1^{\pm} s} \tag{II.31}$$

Finalement, en remarquant que $\theta(t_{\mathcal{V}}) \neq \theta_{c1}$ car $\theta(t)$ est strictement monotone sur $t \in [t_{\mathcal{V}}, t_{c1})$:

- si $\alpha_1^\pm \neq \alpha_3^\pm$:

$$\ddot{\theta}^\pm(s) = \frac{\alpha_1^\pm \alpha_2^\pm}{\alpha_4^\pm \left(\alpha_1^\pm - \alpha_3^\pm\right)} + \left(\frac{\dot{\theta}_{c1}^\pm - \dot{\theta}(t_{\mathcal{V}})}{\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})} - \frac{\alpha_2^\pm}{\alpha_1^\pm - \alpha_3^\pm}\right) \frac{\alpha_3^\pm}{\alpha_4^\pm} e^{\left(\alpha_3^\pm - \alpha_1^\pm\right)s} \tag{II.32}$$

- si $\alpha_1^\pm = \alpha_3^\pm$:

$$\ddot{\theta}^\pm(s) = \frac{\alpha_1^\pm \left(\dot{\theta}_{c1}^\pm - \dot{\theta}(t_{\mathcal{V}})\right)}{\alpha_4^\pm \left(\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})\right)} + \frac{\alpha_2^\pm}{\alpha_4^\pm}\left(1 + \alpha_1^\pm s\right) \tag{II.33}$$

Comme cela à été illustré précédemment dans les équations (II.33) et (II.32), l'existence et la valeur de la limite de $\ddot{\theta}(t)$, lorsque t tend vers t_{c1}^- dépend du signe de $h^\pm(\mu) = \alpha_1^\pm - \alpha_3^\pm$.
De (II.18), il vient

$$h^\pm(\mu) = \frac{3\dot{\theta}_{c1}^\pm}{m}\left(3\mu - 2\left(\mu+1\right)\cos\theta_{c1}\left(\cos\theta_{c1} + \mu \sin\theta_{c1}\right)\right)$$

En remplaçant l'expression de θ_{c1} donnée dans (II.7), on obtient finalement,

- si $\dfrac{4}{3} \leq \mu < \mu_C$, alors $\operatorname{sgn}\left(h^\pm(\mu)\right) = \pm 1$,
- si $\mu > \mu_C$, alors $\operatorname{sgn}\left(h^\pm(\mu)\right) = \mp 1$.
- $h^\pm(\mu_C) = 0$

où

$$\mu_C = \frac{8}{3\sqrt{3}} \tag{II.34}$$

En passant à la limite $s \to \pm\infty$ dans (II.32) et (II.33), on conclut que

Lemme II.9

Si $\exists\, t_{c1} \mid X(t_{c1}) = P_{c1}^\pm$, alors $\exists\, t_{\mathcal{V}} \mid \forall t \in [t_{\mathcal{V}}, t_{c1})$, le système non-linéaire (II.15) est équivalent au système linéaire (II.16) et on a :

- *si* $\dfrac{4}{3} < \mu < \mu_C$, *alors* $\lim_{t \to t_{c1}^-} \ddot{\theta}^\pm(t) = \dfrac{\alpha_1^\pm \alpha_2^\pm}{\alpha_4^\pm \left(\alpha_1^\pm - \alpha_3^\pm\right)} < 0$,
- *si* $\mu > \mu_C$, *alors*
  - *si* $\dfrac{\dot{\theta}_{c1}^\pm - \dot{\theta}(t_{\mathcal{V}})}{\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})} > \dfrac{\alpha_2^\pm}{\alpha_1^\pm - \alpha_3^\pm}$, *alors* $\lim_{t \to t_{c1}^-} \ddot{\theta}^\pm(t) = \pm\infty$,

  – *si* $\dfrac{\dot\theta_{c1}^{\pm} - \dot\theta(t_{\mathcal{V}})}{\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})} < \dfrac{\alpha_2^{\pm}}{\alpha_1^{\pm} - \alpha_3^{\pm}}$, *alors* $\lim_{t\to t_{c1}^-} \ddot\theta^{\pm}(t) = \mp\infty$,
  – *si* $\dfrac{\dot\theta_{c1}^{\pm} - \dot\theta(t_{\mathcal{V}})}{\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})} = \dfrac{\alpha_2^{\pm}}{\alpha_1^{\pm} - \alpha_3^{\pm}}$, *alors* $\lim_{t\to t_{c1}^-} \ddot\theta^{\pm}(t) = \dfrac{\alpha_1^{\pm}\alpha_2^{\pm}}{\alpha_4^{\pm}\left(\alpha_1^{\pm} - \alpha_3^{\pm}\right)} > 0$.
– *si* $\mu = \mu_C$, *alors* $\lim_{t\to t_{c1}^-} \ddot\theta^{\pm}(t) = \mp\infty$.

La figure II.7 montre que les orbites ont toutes le même comportement lorsque $\mu < \mu_C$ (ici $\mu = 1.4$).

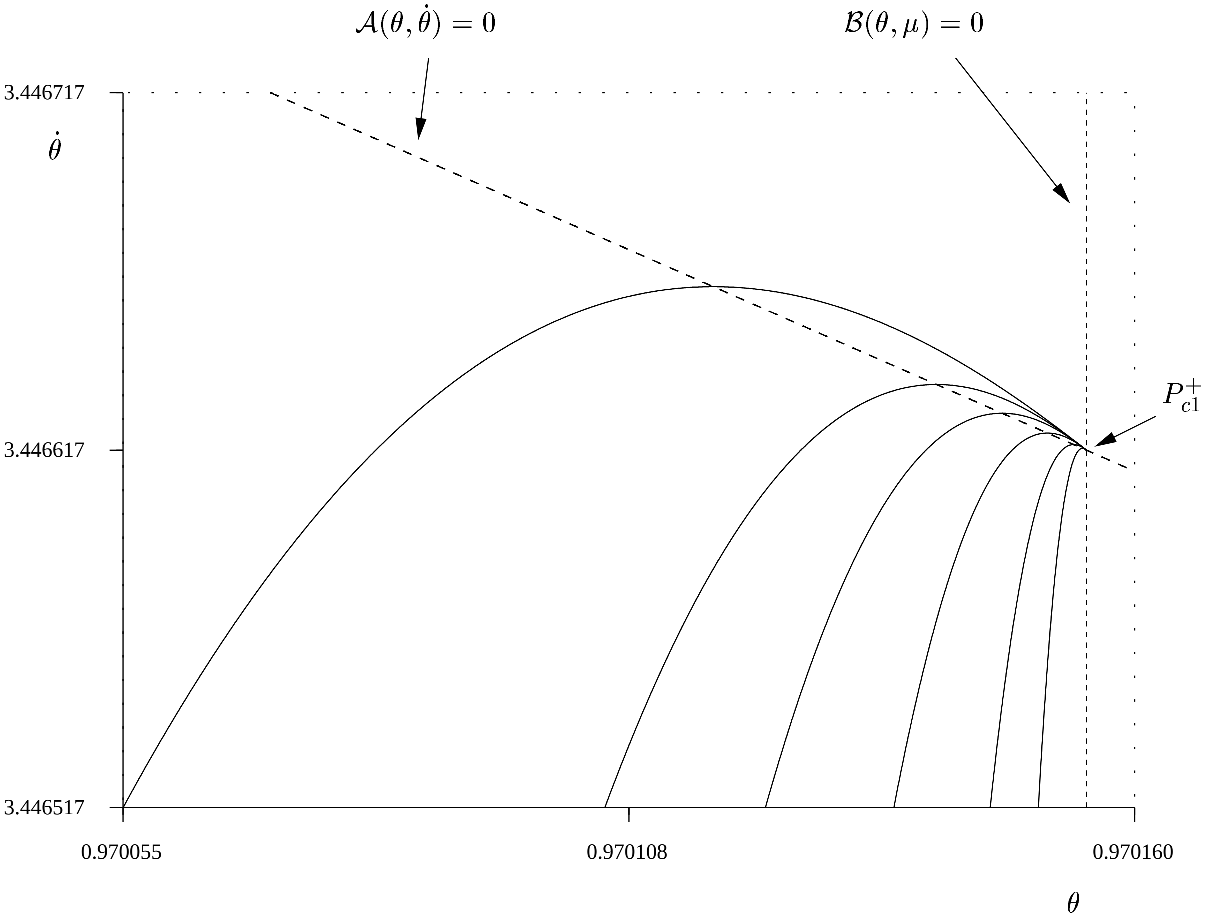

FIG. II.7 – *Visualisation des différents comportements autour de P_{c1}^+ pour $\mu = 1.4 < \mu_C$ ($m = 1$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $l = 1m$)*

La figure II.8 illustre les différents comportements au voisinage du point singulier P_{c1}^+ pour $\mu = 1.6 > \mu_C$.

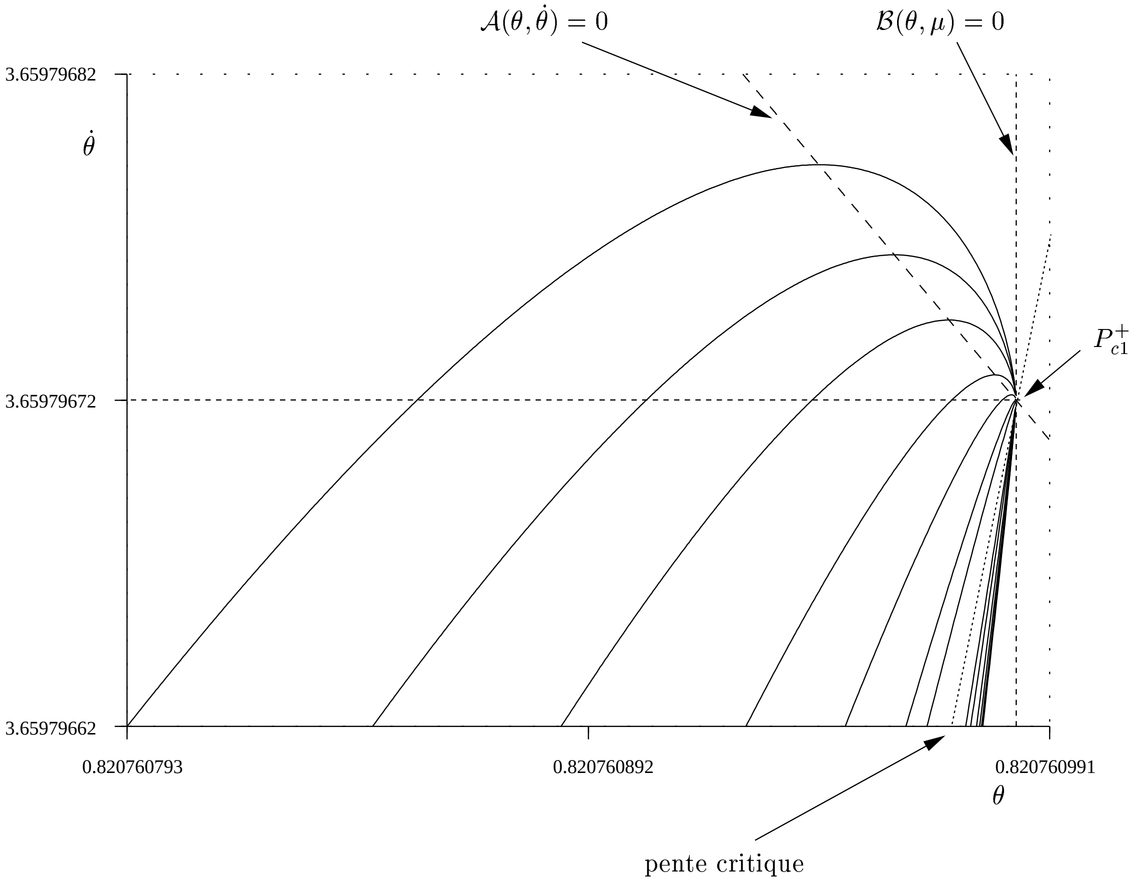

FIG. II.8 – *Visualisation des différents comportements autour de P_{c1}^+ pour $\mu = 1.6 > \mu_C$ ($m = 1$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $l = 1m$)*

Remarque

Nous avons proposé dans [Génot et al., 1997] une autre démonstration du cas $\frac{4}{3} < \mu < \mu_C$. Cette démonstration plus intuitive est donnée dans l'annexe A.

Nous venons de voir que la position de μ par rapport à la valeur μ_C, donnée dans (II.34), joue un rôle déterminant sur l'existence et la nature finie ou infinie de $\lim_{t \to t_{c1}^-} \ddot{\theta}^{\pm}(t)$.

Définition II.4

> *Nous appellerons* coefficient de frottement critique du LCP *(II.4) le coefficient μ_C donné dans (II.34).*

5.2.6 Extension au cas $\mu = \frac{4}{3}$

Il est immédiat que les orbites du système non-linéaire (II.14) en s sont des fonctions continues du paramètre μ. Par conséquent, il en va de même de la fonction $\ddot{\theta}(s)$. En passant à la limite $\mu \to \frac{4}{3}^+$ dans (II.32), et en notant que, d'après (II.18), $\frac{\alpha_1^\pm}{\alpha_4^\pm} = \dot{\theta}_{c1}^\pm$, on en déduit finalement le résultat suivant :

Lemme II.10

> *Dans le cas où $\mu = \frac{4}{3}$, si $\exists\, t_{c1} \mid X(t_{c1}) = P_{c1}^\pm$, alors*
>
> $$\lim_{t \to t_{c1}^-} \ddot{\theta}(t) = -\frac{\dot{\theta}_{c1}^\pm \alpha_2^\pm}{\alpha_3^\pm} < 0$$

5.2.7 Conclusions

Des lemmes II.9 et II.10, on en déduit que, dans tous les cas, $\ddot{\theta}^\pm(t)$ admet toujours une limite, finie ou infinie, lorsque $t \to t_{c1}^-$.

Lemme II.11

> *Si d'après l'un des deux lemmes II.9 et II.10, $\lim_{t \to t_{c1}^-} \ddot{\theta}^\pm(t) = K \in [-\infty, 0)$, alors le point $P_{c1}^\pm$ n'est pas atteint et le système croise la courbe $A(\theta, \dot{\theta}) = 0$ avant $t = t_{c1}$.*

Démonstration

On sait que, si $X(t_{c1}) = P_{c1}^+$, alors $X(t_{c1}^-) \in \mathcal{M}_1^+$ et, si $X(t_{c1}) = P_{c1}^-$, alors $X(t_{c1}^-) \in \mathcal{M}_4^-$. Donc $\exists\, t_1 < t_{c1}$ tel que

- si $X(t_{c1}) = P_{c1}^+$, alors $X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$ et $\theta(t_1) > \arctan \frac{1}{\mu}$,
- si $X(t_{c1}) = P_{c1}^-$, alors $X(t_1) \in \mathcal{M}_4^-$.

On a $\ddot{\theta}^{\pm}(t_1) > 0$. Or, d'après l'hypothèse, $\lim_{t \to t_{c1}^-} \ddot{\theta}^{\pm}(t) < 0$.
En conséquence $\exists\, t_{\mathcal{A}},\ t_1 < t_{\mathcal{A}} < t_{c1} \mid \ddot{\theta}^{\pm}(t_{\mathcal{A}}) = 0$, qui est l'instant recherché. $\diamond$

Remarque

Le lemme II.4 nous permet de conclure quant aux transitions, à savoir que, si $X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$, alors la barre décolle a $t_{\mathcal{A}}^+$ et, si $X(t_1) \in \mathcal{M}_4^-$, alors un impact sans collision est nécessaire pour ne pas rentrer dans le mode inconsistant $\mathcal{M}_2^-$.

Lemme II.12

Si d'après le lemme II.9, on doit avoir $\lim_{t \to t_{c1}^-} \ddot{\theta}^{\pm}(t) = +\infty$, alors, en posant

$$p_N(\tau) = \int_{t_{\mathcal{V}}}^{\tau} F_N(t)dt$$

on a :

$$P_N = \lim_{\tau \to t_{c1}} p_N(\tau) < +\infty$$

et, en posant $\dot{x}_A^{stick}(t_{\mathcal{V}}) = l\left(\dot{\theta}(t_{\mathcal{V}})\sin\theta(t_{\mathcal{V}}) - \dot{\theta}_{c1}^{\pm}\sin\theta_{c1}\right) - \dfrac{\mu}{m}P_N$, il vient que :

- *si $\dot{x}_A(t_{\mathcal{V}}) < \dot{x}_A^{stick}(t_{\mathcal{V}})$, alors la barre ne s'arrête pas de glisser, $P_{c1}^{\pm}$ est atteint,*
- *si $\dot{x}_A(t_{\mathcal{V}}) > (=)\dot{x}_A^{stick}(t_{\mathcal{V}})$, alors le point A s'arrête de glisser à $t^* < (=)t_{c1}$ et*
  - *si $X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$, alors $X(t^{*+}) \in M_{IV}$,*
  - *si $X(t_1) \in \mathcal{M}_4^-$, alors la barre décolle au même instant : $X(t^*) \in M_I$.*

Démonstration

Il est immédiat que :

$$p_N(\tau) = \int_{t_{\mathcal{V}}}^{\tau} F_N(t)dt = \int_0^{t^{-1}(\tau)} \mathcal{A}\left(\theta(s), \dot{\theta}(s)\right) ds = \int_0^{t^{-1}(\tau)} \left(g - l\dot{\theta}^2(s)\sin\theta(s)\right) ds$$

Des expressions de $\theta(s) = x_1^{\pm}(s)$ et $\dot{\theta}(s) = x_2^{\pm}(s)$ dans (II.26) et (II.27) respectivement, il vient que $P_N = \lim_{\tau \to t_{c1}^-} p_N(\tau) = \int_{t_{\mathcal{V}}}^{t_{c1}} F_N(t)dt$ est une intégrale convergente,

soit $P_N < +\infty$.
Notons d'abord que, d'après (II.3) :

$$\ddot{x}_A = \ddot{x} + l\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) = \frac{\mu}{m}F_N + l\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) > 0$$

donc $\dot{x}_A$ est une fonction strictement croissante du temps. D'autre part :

$$\dot{x}_A(\tau) = \dot{x}(\tau) + l\dot{\theta}(\tau)\sin\theta(\tau) = \dot{x}(t_{\mathcal{V}}) + \frac{\mu}{m}\int_{t_{\mathcal{V}}}^{\tau} F_N(t)dt + l\dot{\theta}(\tau)\sin\theta(\tau)$$

soit :

$$\dot{x}_A(\tau) = \dot{x}_A(t_{\mathcal{V}}) + \frac{\mu}{m}p_N(\tau) + l\left(\dot{\theta}(\tau)\sin\theta(\tau) - \dot{\theta}(t_{\mathcal{V}})\sin\theta(t_{\mathcal{V}})\right)$$

On en déduit que, si $\dot{x}_A(t_{\mathcal{V}}) < \dot{x}_A^{stick}(t_{\mathcal{V}})$, alors $\forall\tau \in [t_{\mathcal{V}}, t_{c1}], \dot{x}_A(\tau) < 0$, le système reste dans le mode M_{II} et le point singulier $P_{c1}^{\pm}$ est atteint.
Dans le cas où $\dot{x}_A(t_{\mathcal{V}}) > \dot{x}_A^{stick}(t_{\mathcal{V}})$, la démonstration du fait que la barre décolle si $X(t_1) \in \mathcal{M}_4^-$ est identique à celle du lemme II.3. Par contre, $F_N(t^*) = 0$ n'est pas solution si $X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+$, car on aurait $\ddot{y}_A(t^*) = -A(t^*) < 0$. $\diamond$

Remarque

On aurait pu penser qu'un raisonnement énergétique similaire à celui utilisé dans la preuve du lemme II.9 aurait permis de conclure l'arrêt du glissement du point de contact A avant que la trajectoire n'atteigne le point singulier P_{c1}. Une conséquence non négligeable de ce résultat aurait été que la force de contact F_N reste toujours bornée ce qui justifierait la consistance du modèle. Comme nous venons de le prouver dans le lemme précédent, il existe des conditions pour lesquelles la barre ne s'arrête pas de glisser : la force de contact F_N tend en conséquence vers $+\infty$. Néanmoins, nous pensons que ce résultat ne remet pas en cause directement la validité du modèle, dans le sens où l'impulsion P_N reste bornée et l'état du système ne diverge pas.

Nous concluerons sur le résumé suivant :

Proposition II.3

Supposons que $\exists\, t_1 \mid X(t_1) \in \mathcal{M}_1^+ \bigcup \mathcal{M}_4^-$, *avec* $\arctan\dfrac{1}{\mu} < \theta(t_1) < \theta_{c1}$. *Alors*

- *si* $\dfrac{4}{3} \leq \mu < \mu_C$, *alors la barre décolle ou bien s'arrête de glisser et la force* $F_N(t) = \dfrac{\mathcal{A}(t)}{\mathcal{B}(t)}$ *reste toujours bornée,*
- *si* $\mu \geq \mu_C$, *alors*
  - *soit la trajectoire arrive au dessus de la pente critique* $\dfrac{\dot{\theta}_{c1}^{\pm} - \dot{\theta}(t_{\mathcal{V}})}{\theta_{c1} - \theta(t_{\mathcal{V}})} = \dfrac{\alpha_2^{\pm}}{\alpha_1^{\pm} - \alpha_3^{\pm}}$ *au voisinage de* $P_{c1}^{\pm}$ *et la barre s'arrête de glisser ou bien décolle,*
  - *soit la trajectoire arrive en dessous de la pente critique au voisinage de* $P_{c1}^{\pm}$ *et alors*
    - *si* $\dot{x}_A(t_{\mathcal{V}}) < \dot{x}_A^{stick}(t_{\mathcal{V}})$, *alors la barre continue de glisser et la trajectoire passe par* $P_{c1}^{\pm}$, *la force de contact atteignant certes* $+\infty$ *mais l'impulsion* P_N *demeurant bornée,*
    - *si* $\dot{x}_A(t_{\mathcal{V}}) \geq \dot{x}_A^{stick}(t_{\mathcal{V}})$, *alors la barre s'arrête de glisser avant que la trajectoire n'atteigne* $P_{c1}^{\pm}$, *la force de contact restant bornée,*
  - *soit la trajectoire suit la pente critique et le système atteint le point singulier* $P_{c1}^{\pm}$ *avec*

$$\lim_{t \to t_{c1}^-} F_N(t) = \frac{\alpha_1^{\pm}\alpha_2^{\pm}}{\alpha_4^{\pm}\mathcal{C}(\theta_{c1}, \mu)\left(\alpha_1^{\pm} - \alpha_3^{\pm}\right)} < +\infty$$

Démonstration

La démonstration est évidente à partir des lemmes II.9, II.10, II.11 et II.12.

6 Conclusions

Cette analyse se démarque clairement des études précédentes consacrées à l'Exemple de Painlevé [Lötstedt, 1981; Mason et al., 1988; Pfeiffer et al., 1996] dans le sens où elle ne s'arrête pas à la simple constatation de l'existence d'un mode inconsistant (mode $\mathcal{M}_2$ du LCP), pour tout coefficient de frottement supérieur à $\frac{4}{3}$.
Nous avons effectué une étude détaillée de l'évolution du système, lorsqu'il est initialisé dans un mode consistant $\mathcal{M}_1$ ou $\mathcal{M}_3$: qui nous dit d'ailleurs qu'il est réellement initialisable dans le mode $\mathcal{M}_2$?

6.1 Consistance du modèle

Nous avons prouvé que si le système est initialisé dans le mode consistant $\mathcal{M}_1^+$ (ou $\mathcal{M}_4^-$) du LCP, alors même si la force de contact peut prendre des valeurs infinies pour un choix judicieux de conditions initiales, l'impulsion demeure quant à elle toujours bornée (proposition II.3). Par conséquent, l'état ne diverge pas. C'est d'une part essentiel pour la validité du modèle et d'autre part rassurant, étant donné que ce systeme est dissipatif (et cela bien que la théorie des systèmes dissipatifs soit pour l'instant limitée essentiellement aux systèmes lisses affines en l'entrée). En effet, si l'on observe ce système de l'*extérieur*, on ne se rend pas compte que le multiplieur diverge (ce multiplieur peut être considéré comme une entrée du système, non bornée au sens $\mathcal{L}_\infty$ mais bornee au sens $\mathcal{L}_p$, $p < +\infty$). Rappelons d'ailleurs que la théorie des systèmes dissipatifs repose en particulier sur le fait que le *supply rate* $< u, y >$, où u est l'entrée et y la sortie, est localement intégrable. Elle s'applique donc au système de Painlevé avec u la force généralisée et $y = \dot{q}$.
Cette étude nous a aussi permis d'exhiber une nouvelle valeur critique du coefficient de frottement

$$\mu_C = \frac{8}{3\sqrt{3}} > \frac{4}{3}$$

La position du coefficient de frottement du système par rapport à cette nouvelle valeur détermine les transitions à partir du mode de glissement M_{II} au voisinage de P_{c1}^+. Plus exactement :

- si $\frac{4}{3} \leq \mu < \mu_C$, et si $\dot{x}_A(t_1) \ll 0$, la transition s'effectue vers le mode M_I (la barre décolle), le point singulier P_{c1}^+ n'est pas atteint et la force de contact finit par s'annuler, en restant toujours bornée,

- si $\mu \geq \mu_C$, et si le système entre dans un voisinage du point singulier P_{c1}^+, alors

  - si l'orbite est en dessous d'une droite critique (lemme II.9), selon la vitesse de glissement à l'entrée du voisinage, soit le système transite vers dans le mode M_{IV}, soit le système reste dans le mode M_{II}, la trajectoire passe par le point P_{c1}^{+} et la force de contact tend vers l'infini mais l'impulsion demeure bornée,

- si l'orbite est au dessus de cette droite critique, alors le point singulier P_{c1}^{-} n'est pas atteint, la force de contact demeure bornée et, toujours en fonction de la vitesse de glissement à l'entrée du voisinage, la transition se fait soit vers le mode M_I, soit vers le mode M_{IV},
- si l'orbite suit la droite critique, alors le point singulier P_{c1}^{+} est atteint, mais la force de contact admet une limite finie et reste donc bornée.

6.2 Indétermination

Nous avons aussi effectué une étude détaillée de l'indétermination, correspondant au mode $\mathcal{M}_4$. Dans ce mode, deux solutions sont admissibles : $F_N = 0$ et $F_N = \dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$. Si l'on choisit la solution $F_N(t_1) = 0$, alors la barre décolle instantanément à l'instant t_1 (proposition II.1).

Dans $\mathcal{M}_4^{+}$, si l'on décide de choisir $F_N(t) = \dfrac{\mathcal{A}(t)}{\mathcal{B}(t)}$ comme la solution pour $t \geq t_1$, alors la barre finit par s'arrêter de glisser et décolle au même instant (lemme II.3). La transition s'effectue donc toujours vers le mode M_I du système hybride. Il ne faut néanmoins pas perdre de vue que les orbites correspondant aux deux solutions sont totalement distinctes. $F_N(t_1) = 0$ entraîne le décollage instantané de la barre, alors que $F_N(t_1) = \dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} > 0$ implique que $\ddot{y}_A(t_1) = 0$. Ceci constitue un réel problème au niveau de la simulation. Quel choix effectuer alors ?

Painlevé [Painlevé, 1905] propose le principe suivant :

> Si deux corps ne produisent pas de force l'un sur l'autre lorsque le frottement est nul, alors ils n'en produisent pas non plus si le frottement est non nul.

En d'autres termes, si $X(t_1) \in \mathcal{M}_4$ (rappelons qu'alors $\mu \geq \dfrac{4}{3}$), il faut choisir $F_N(t_1) = 0$ comme solution. En effet, si on avait $\mu = 0$ (absence de frottement), le mode indéterminé $\mathcal{M}_4$ (de même que le mode inconsistant $\mathcal{M}_2$) n'existerait pas et on aurait $X(t_1) \in \mathcal{M}_3$, avec comme unique solution $F_N(t_1) = 0$.

Il ne faut néanmoins pas perdre de vue que la règle énoncée plus haut ne constitue qu'un principe. En particulier, Ivanov [Ivanov, 1986] argumente contre ce principe : d'une part ce dernier n'a pas été vérifié expérimentalement, d'autre part, ses solutions ne possèdent pas la propriété d'être continues par rapport aux conditions initiales [Lötstedt, 1981].

6.3 Impact sans collision

Dans le mode $\mathcal{M}_4^-$, la solution $F_N = \dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ peut amener le système vers la courbe $\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta}) = 0$, c'est-à-dire à la frontière avec le mode inconsistant $\mathcal{M}_2^-$: seul un impact sans collision peut alors éviter au système de rentrer dans ce mode. Ceci pose évidemment de nombreuses questions :

- Comment calculer l'impulsion et le saut en vitesse associé?
- Ce saut est-il unique?
- Quelle est l'origine physique de ce phénomène?

Une étude des sauts possibles dans le cas de l'Exemple de Painlevé est donnée dans l'annexe B.
Afin de définir un saut, Baraff [Baraff, 1993] énonce les deux règles suivantes (précédemment proposées par Bolotov [Bolotov, 1906]) :

- Etant donné que l'inconsistance est due au frottement, l'impulsion doit transformer au moins un point de contact en frottement statique.
- L'impulsion doit être telle que les corps ne se séparent pas après la discontinuité.

Même si les travaux de Baraff [Baraff, 1993] sur le thème des impacts sans collision ne sont pas à négliger, il n'en reste pas moins que cette redéfinition du principe des contraintes de Kilmister [Kilmister et al., 1966] se base sur l'étude d'un problème compliant approximant, et il est tout-à-fait possible que les règles précédemment citées soient invalidées un jour par l'étude d'un autre problème approximant.
Comme cela est illustré dans l'annexe B, l'impulsion, correspondant à ces deux lois ($\dot{x}_A(t_k^+) = 0$ et $\dot{y}_A(t_k^+) = 0$), ne peut être à l'intérieur cône de frottement qu'à condition que $X(t_k^-) \in \mathcal{M}_2 \bigcup \mathcal{M}_4$. En conséquence, ces deux lois ne nous disent pas comment simuler numériquement le système lorsque $F_N \to +\infty$ dans le mode $\mathcal{M}_1^+$ (rappelons que dans ce cas, $\ddot{\theta} \to +\infty$).

6.4 Aspects simulation

Comme nous l'avons dit plus haut, au voisinage des points singuliers, la force de contact peut devenir arbitrairement grande. Plus précisément, en un laps de temps très court :

- soit la force F_N tend vers 0 et la barre décolle,
- soit le point A s'arrête de glisser sans pour autant décoller,

- soit la force F_N tend vers une limite finie positive, ce qui constitue néanmoins un cas isolé (voir proposition II.3),
- soit la force F_N tend vers l'infini et le point singulier est atteint.

Ceci pose évidemment un problème au niveau de la simulation et plus particulièrement au niveau du choix du pas de discrétisation.
Il est intéressant de noter que Moreau [Moreau et al., 1988] est confronté à un problème similaire dans l'étude du comportement d'une barre avec un bout rond. Cette modification du type de contact influence diminue la valeur du coefficient de frottement limite à partir duquel $\mathcal{B}(\theta, \mu)$ peut s'annuler, comme cela est illustré dans l'annexe C. Moreau exhibe un cas où la vitesse tangentielle du point de contact initialisée à une valeur relativement élevée décroît brutalement, et parle alors de "frictional catastrophe" (en l'honneur de Lecornu [Lecornu, 1905], qui fut le premier à envisager des sauts en vitesse pour résoudre les inconsistances). Au même instant la barre décolle. Il illustre le fait que son algorithme lui livre différentes trajectoires post-catastrophes, en fonction du pas de discrétisation choisi. En effectuant une étude statistique, il trouve que le cas où la vitesse tangentielle s'effondre jusqu'à 0 est de loin le plus probable.
Supposons que nous appliquions les règles de Baraff [Baraff, 1993] présentées plus haut dans le cas présent, c'est-à-dire lorsque la force de contact dépasse une valeur seuil prédéfinie. Ces règles imposeraient non seulement que le point A s'arrête de glisser, ce qui est faux dans la majeure partie des cas, mais aussi et surtout que les corps restent en contact après la singularité, ce qui est encore une fois abusif, voir l'énumération des différentes transitions possibles dans la sous-section sur la consistance du modèle. D'un autre côté, il ne semble pas raisonnable de laisser l'intégrateur "se débrouiller tout seul" : au voisinage du point singulier P_{c1}^+, dans le cas $\mu > \mu_C$ et lorsque l'orbite arrive sous la droite la droite avec une vitesse de glissement suffisamment grande, le fait que juste au dessus de la courbe $\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta}) = 0$, $\ddot{\theta} \rightarrow -\infty$ et que juste au dessous de cette même courbe $\ddot{\theta} \rightarrow +\infty$ étant tout sauf un gage de stabilité numérique (il en va de même pour la séparatrice $\theta = \theta_{c1}$). Le traitement numérique de ce type de situation reste, à notre avis, un problème ouvert.

6.5 Perspectives

Nous sommes convaincus que les démonstrations, basées d'une part, sur la linéarisation après changement de l'échelle de temps autour des points singuliers, et d'autre part, sur des considérations énergétiques simples, peuvent s'étendre à l'analyse de systèmes plus complexes. En particulier, dans le cas de plusieurs contacts actifs, la discussion sur les solutions du LCP qui a alors une forme matricielle peut s'effectuer par énumération des différents modes possibles ; par analogie avec l'Exemple de Painlevé, les singularités à étudier seront celles correspondant à une perte de rang

de la matrice du LCP.
D'autre part, des résultats similaires à ceux obtenus pour l'exemple que nous avons traité devraient pouvoir s'établir si l'on rajoute des forces extérieures autres que la gravité, à condition que ces dernières soient conservatrices : cette hypothèse nous permettrait d'appliquer le même raisonnement basé sur le bilan énergétique. Une première étape pourrait consister en l'étude d'une craie que l'on essaye de maintenir en glissement contre un tableau, telle que le propose Moreau [Moreau, 1986].
Enfin, il reste à étudier le comportement du système à l'issue de la phase de vol, lorsqu'il quitte le mode M_I pour entrer dans l'un des modes de contact (statique / glissement). En particulier que faire si à l'issue de la phase de choc le système se trouve dans le mode inconsistant $\mathcal{M}_2$? A priori, seul un impact sans collision devrait nous permettre de sortir de ce mode. Est-il raisonnable d'envisager deux impacts consécutifs instantanés ? Que penser alors de la validité de la loi de choc considérée ?

Nous conclurons en remarquant que nombre de principes ont été énoncés pour combler les insuffisances du modèle considéré, aussi bien pour résoudre les indéterminations, que pour sortir des inconsistances. L'un des résultats les plus importants de cette analyse serait peut-être qu'il ne faut pas essayer de faire dire au modèle plus que ce qu'il est capable de nous dire. Concernant certains paradoxes dans l'utilisation du principe classique du maximum de vraisemblance en modélisation statistique, Le Cam [Le Cam, 1990], après avoir discuté les recommandations et principes usuels de cette approche, énonce un principe qui semble aussi trouver son application dans le cadre de la modélisation des systèmes mécaniques :

> *Basic Principle 0. Do not trust any principle.*

Chapitre III

Contrôle du non-glissement

1 Introduction

L'une des caractéristiques premières de tout type de locomotion à pattes que l'on rencontre dans la nature est d'éviter que les points de support (en contact avec le sol) ne commencent à glisser, ce qui paraît naturel à plus d'un titre. Aussi semble-t'il intéressant d'étudier s'il est possible d'établir des conditions sur la loi de commande garantissant le non-glissement des points en contact. Une autre question se pose au moment de l'impact avec le sol d'une extrémité initialement en balancement. Plus exactement, supposons que, dans le cas d'un robot bipède, nous ayons conçu une loi de commande qui garantisse le non-glissement du pied d'appui durant toute la phase de simple support. Dans l'hypothèse des corps rigides, l'impact se traduit par une discontinuité au niveau de vitesses (les positions étant elles supposées rester inchangées). En conséquence, il est tout-à-fait envisageable que certains points de contact, initialement statiques, commencent à glisser à l'issue du choc, ce qui risque de s'avérer catastrophique. La phase de choc étant considérée comme instantanée (ce qui constitue une bonne approximation de la réalité dans le cas d'objets rigides), il ne semble pas raisonnable d'imaginer qu'une commande, même impulsive, appliquée durant cette phase puisse permettre de garantir le non-glissement en post-impact. Notre idée consiste donc à établir des conditions sur l'état pré-impact garantissant que tel(s) point(s) décolle(nt) et que tel(s) autre(s) demeure(nt) en contact statique en post-impact.

2 Phase de support continu

Le système étant initialement dans un état $(q, \dot{q})$ correspondant à ce que Trinkle [Trinkle et al., 1995] appelle le "*all-rolling case*" (tous les points de contact sont en mode statique, $\mathcal{I}_0(q, \dot{q}) = \mathcal{I}(q)$), notre but est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes sur la loi de commande u pour maintenir le contact statique en certains points $\mathcal{I}_S(q) \subset \mathcal{I}(q)$ et pour forcer le décollage aux autres points $\mathcal{I}_B(q) = \mathcal{I}(q) \backslash \mathcal{I}_S(q)$.

En d'autres termes :

$$\forall i \in \mathcal{I}(q) : \begin{cases} \ddot{F}_i = 0, \;\; \ddot{F}_{t,i} = 0 & \text{si } i \in \mathcal{I}_S(q) \\ \ddot{F}_i > 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{III.1}$$

Supposons que le vecteur des contraintes F ait été réordonné de telle manière que les $r = \mathrm{Card}(\mathcal{I}_S(q))$ premiers indices correspondent aux points de contact que l'on désire maintenir et que les $p - r$ indices suivants correspondent à ceux que l'on désire casser. Dans la suite, nous utiliserons l'indice S pour désigner la partie relative à $\mathcal{I}_S(q)$ et l'indice B pour celle correspondant à $\mathcal{I}_B(q)$.
(III.1) se reformule en conséquence en :

$$\ddot{F}_S \;\;=\;\; 0 \tag{III.2}$$

$$\begin{aligned} \ddot{F}_{t,S} &= 0 && \text{(III.3)} \\ \ddot{F}_B &> 0 && \text{(III.4)} \end{aligned}$$

De la relation de complémentarité dans (I.7) entre les accélérations normales $\ddot{F}_i$ et les forces normales $\lambda_{n,i}$, il vient que $\lambda_{n,B} = 0$. En conséquence, de la loi de frottement d'Amontons-Coulomb (I.19), on en déduit finalement que $\lambda_{t,B} = 0$. D'où, en introduisant $h(q, \dot{q}, u) = Tu - N(q, \dot{q})$, la dynamique (I.1) se réduit à :

$$M(q)\ddot{q} = h(q, \dot{q}, u) + \nabla F_S(q)\lambda_{n,S} + G_S(q)\lambda_{t,S} \tag{III.5}$$

Etant donné que $\ddot{F}_S = \nabla F_S(q)^T \ddot{q} + f_S(q, \dot{q})$, (III.2) est équivalent, après insertion de l'accélération $\ddot{q}$ extraite de (III.5), à :

$$\nabla F_S^T M^{-1} \nabla F_S \lambda_{n,S} = -\nabla F_S^T M^{-1}(h + G_S\lambda_{t,S}) - f_S$$

Hypothèse III.1

Nous supposerons que les contraintes que l'on désire maintenir sont indépendantes.

Cela signifie que ∇F_S est de rang plein $r \leq n$, et donc $\nabla F_S^T M^{-1} \nabla F_S$ est une matrice positive symétrique définie et par delà inversible. Il vient que :

$$\lambda_{n,S} = -(\nabla F_S^T M^{-1} \nabla F_S)^{-1}(\nabla F_S^T M^{-1}(h + G_S\lambda_{t,S}) + f_S) \tag{III.6}$$

De façon similaire, en utilisant que $\ddot{F}_{t,S} = G_S(q)^T \ddot{q} + f_{t,S}(q, \dot{q})$, de (III.3), on obtient que :

$$G_S^T M^{-1}(h + \nabla F_S \lambda_{n,S} + G_S \lambda_{t,S}) = -f_{t,S} \tag{III.7}$$

Définition III.1

Nous noterons $P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}}$ l'opérateur de projection orthogonal sur $\nabla F_S^{\perp}$ suivant la métrique M^{-1} défini par :

$$P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} = I - \nabla F_S (\nabla F_S^T M^{-1} \nabla F_S)^{-1} \nabla F_S^T M^{-1}$$

La substitution de l'expression de $\lambda_{n,S}$ tirée de (III.6) dans (III.7) nous livre alors finalement que :

$$\begin{aligned} G_S^T M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S \lambda_{t,S} &= G_S^T M^{-1} \nabla F_S (\nabla F_S^T M^{-1} \nabla F_S)^{-1} f_S \\ &\quad - f_{t,S} - G_S^T M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} h && \text{(III.8)} \end{aligned}$$

La prochaine étape consiste à trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $G_S^T M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S$ pour que celle-ci soit inversible.

Lemme III.1

$$G_S^T M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S \textit{ est inversible} \iff P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S \textit{ est de rang plein } r.$$

Démonstration

Notons que, d'une part $P^T_{\nabla F^{\perp}_S/M^{-1}} M^{-1} = M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}}$ et que, d'autre part, $P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}}$ étant idempotente en tant qu'opérateur de projection $P^2_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} = P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}}$. On en déduit que :

$$G_S^T M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S = (P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S)^T M^{-1} (P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S)$$

Or une matrice de la forme $X^T M^{-1} X$, où X est une matrice, est inversible *si et seulement si* X est de rang plein, d'où le résultat. $\diamond$

Lemme III.2

$$\textit{rank}(P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S) = \textit{rank}(G_S) \iff \textit{Im}(G_S) \cap \textit{Im}(\nabla F_S) = \{0\}$$

Démonstration

Notons $k = \mathrm{rank}(G_S)$.
Soit $(G_1, \ldots, G_k)$ une base de $\mathrm{Im}(G_S)$.
Soit $v \in \mathrm{Im}(G_S) \cap \mathrm{Im}(\nabla F_S)$. Comme $v \in \mathrm{Im}(G_S)$, $\exists \alpha \in \mathbf{R}^k$ tel que $v = \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i G_i$.
D'autre part $v \in \mathrm{Im}(\nabla F_S)$, donc

$$P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}}(u) = \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}}(G_i) = 0 \tag{III.9}$$

Comme $\mathrm{rank}(P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S) = k \iff (P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}}(G_1), \ldots, P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}}(G_k)$ sont des vecteurs indépendants), de (III.9) il vient que

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S) = k \quad &\iff \quad \alpha_i = 0, \forall i \in \{1, \ldots, k\} \\ &\iff \quad v = 0 \end{aligned}$$

finissant la preuve. $\diamond$

On en déduit finalement le résultat :

Proposition III.1

$$G_S^T M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S \textit{ est inversible } \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} G_S \textit{ est de rang plein } r \\ Im(G_S) \cap Im(\nabla F_S) = \{0\} \end{array} \right.$$

Démonstration

Etant donné que $\mathrm{rank}(G_S) \leq r$, la preuve est immédiate à partir des lemmes III.1 et III.2. $\diamond$

Remarques

- $\mathrm{Im}(\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}) = \{y \in \mathbf{R}^r \mid \nabla F_S^T M^{-1} y = 0\}$.
- Comme $\dim(\mathrm{Im}(G_S)) = r$ et $\dim(\mathrm{Im}(\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}})) = n - r$, on déduit du lemme III.2 que la condition nécessaire pour que l'inverse de la matrice $G_S^T M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S$ existe est que :
$$n_q \geq 2r$$
Ceci est généralement le cas pour des robots bipèdes.

Hypothèse III.2

$$\textit{Dans la suite, nous supposerons que } \left\{ \begin{array}{l} G_S \textit{ est de rang plein } r \\ Im(G_S) \cap Im(\nabla F_S) = \{0\} \end{array} \right.$$

Par conséquent, $G_S^T M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S$ est inversible.

Notre but est désormais d'exprimer les conditions sur la loi de commande u correspondant aux contraintes :

$$\begin{aligned} \lambda_n &\geq 0 && \text{(III.10)} \\ -\mu_{0,i}\lambda_{n,i} &\leq \lambda_{t,i} \leq \mu_{0,i}\lambda_{n,i} && \text{(III.11)} \end{aligned}$$

De (III.8) nous obtenons finalement l'expression des forces tangentielles de contact :

$$\begin{aligned} \lambda_{t,S} = & \left(G_S^T M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S\right)^{-1} \left(G_S^T M^{-1} \nabla F_S \left(\nabla F_S^T M^{-1} \nabla F_S\right)^{-1} f_S \right. \\ & \left. - f_{t,S} - G_S^T M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} h\right) \qquad \text{(III.12)} \end{aligned}$$

Remarquons que les calculs précédents sont symétriques par les substitutions :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\nabla F_S & \longleftrightarrow & G_S \\ f_S & \longleftrightarrow & f_{t,S} \\ P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} & \longleftrightarrow & P_{G^{\perp}_{S/M^{-1}}}\end{array}\right.$$

Cette constatation nous permet de déduire directement de (III.12) l'expression des forces normales de contact :

$$\begin{aligned}\lambda_{n,S} \;=\; & \left(\nabla F_S^T M^{-1} P_{G^{\perp}_{S/M^{-1}}} \nabla F_S\right)^{-1} \left(\nabla F_S^T M^{-1} G_S \left(G_S^T M^{-1} G_S\right)^{-1} f_{t,S}\right. \\ & \left. - f_S - \nabla F_S^T M^{-1} P_{G^{\perp}_{S/M^{-1}}} h\right) \qquad \text{(III.13)}\end{aligned}$$

Pour des raisons de lisibilité, introduisons :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overline{\nabla} F_S & = & M^{-\frac{1}{2}} \nabla F_S \\ \overline{G}_S & = & M^{-\frac{1}{2}} G_S \\ \overline{P}_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} & = & M^{-\frac{1}{2}} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} M^{\frac{1}{2}} \\ \overline{P}_{G^{\perp}_{S/M^{-1}}} & = & M^{-\frac{1}{2}} P_{G^{\perp}_{S/M^{-1}}} M^{\frac{1}{2}} \\ \overline{h} & = & M^{-\frac{1}{2}} h\end{array}\right.$$

Ceci nous permet de réécrire (III.12) and (III.13) sous la forme plus compacte :

$$\begin{aligned}\lambda_{t,S}(q,\dot{q},u) \;=\; & \left(\overline{G}_S^T \overline{P}_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} \overline{G}_S\right)^{-1} \left(\overline{G}_S^T \overline{\nabla} F_S \left(\overline{\nabla} F_S^T \overline{\nabla} F_S\right)^{-1} f_S\right. \\ & \left. - f_{t,S} - \overline{G}_S^T \overline{P}_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} \overline{h}\right) \qquad \text{(III.14)} \\ \lambda_{n,S}(q,\dot{q},u) \;=\; & \left(\overline{\nabla} F_S^T \overline{P}_{G^{\perp}_{S/M^{-1}}} \overline{\nabla} F_S\right)^{-1} \left(\overline{\nabla} F_S^T \overline{G}_S \left(\overline{G}_S^T \overline{G}_S\right)^{-1} f_{t,S}\right. \\ & \left. - f_S - \overline{\nabla} F_S^T \overline{P}_{G^{\perp}_{S/M^{-1}}} \overline{h}\right) \qquad \text{(III.15)}\end{aligned}$$

Introduisons maintenant la matrice diagonale $\mu_{0,S} = (\mathrm{diag}\left[\mu_{0,i}\right], i \in \{1,\ldots,r\}) \in \mathbf{R}^{r\times r}$.
La condition (III.11) se réécrit aisément sous la forme :

$$\mu_{0,S}\lambda_{n,S} + \lambda_{t,s} \;>\; 0 \qquad \text{(III.16)}$$

$$\mu_{0,S}\lambda_{n,S} - \lambda_{t,s} \;>\; 0 \qquad \text{(III.17)}$$

Remarque
Dans (III.16) et (III.17), nous avons exclu le bord de cône qui pourrait potentiellement amener le point de contact à glisser, voir (I.19).

Maintenant que nous avons les expressions complètes de $\lambda_{t,S}$ et $\lambda_{n,s}$, la condition (III.4) s'écrit :

$$\begin{aligned}\ddot{F}_B(q,\dot{q},u) &= \nabla F_B^T M^{-1}\left(Tu - N(q,\dot{q}) + \nabla F_S \lambda_{n,S}(q,\dot{q},u)\right.\\ &\qquad \left.+ G_S \lambda_{t,S}(q,\dot{q},u)\right) + f_B > 0 \end{aligned} \tag{III.18}$$

Finalement, en mettant toutes les conditions (III.10), (III.16), (III.17) et (III.18) ensemble, on aboutit au résultat suivant :

Proposition III.2

Si ∇F_S et G_S sont de rang plein et si Im$(G_S) \cap$ Im$(\nabla F_S) = \{0\}$, alors des conditions nécessaires et suffisantes sur la loi de commande u pour maintenir le contact aux points $\mathcal{I}_S(q)$ et pour forcer le décollage des autres $\mathcal{I}_B(q) = \mathcal{I}(q) \setminus \mathcal{I}_S(q)$ sont :

$$\begin{aligned}\lambda_{n,S}(q,\dot{q},u) &> 0\\ \mu_{0,S}\lambda_{n,S}(q,\dot{q},u) + \lambda_{t,S}(q,\dot{q},u) &> 0\\ \mu_{0,S}\lambda_{n,S}(q,\dot{q},u) - \lambda_{t,S}(q,\dot{q},u) &> 0\\ \ddot{F}_B(q,\dot{q},u) &> 0\end{aligned}$$

où les fonctions $\lambda_{n,S}$, $\lambda_{t,S}$ et $\ddot{F}_B$ sont données dans (III.15), (III.14) et (III.18) respectivement.

3 Impact inélastique

Après avoir établi les conditions nécessaires et suffisantes dans le “all-rolling case” durant la phase de simple support, nous allons maintenant essayer de trouver des conditions du même ordre sur la configuration $q(t_k)$ et la vitesse $\dot{q}(t_k^-)$ pré-impact garantissant un contact statique en certains points $\mathcal{I}_S(q(t_k)) \subset \mathcal{I}(q(t_k))$ et impliquant le décollage des autres points $\mathcal{I}_B(q(t_k)) = \mathcal{I}(q(t_k)) \setminus \mathcal{I}_S(q(t_k))$ après l'impact $(t = t_k^+)$, excluant ainsi tout contact glissant en post-impact.

$$\forall i \in \mathcal{I}(q(t_k)) : \begin{cases} \dot{F}_i(q(t_k),\dot{q}(t_k^+)) = 0, \;\; \dot{F}_{t,i}(q(t_k),\dot{q}(t_k^+)) = 0 & \text{si } i \in \mathcal{I}_S(q(t_k)) \\ \dot{F}_i(q(t_k),\dot{q}(t_k^+)) > 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{III.19}$$

Il est à noter ici que $\mathcal{I}(q(t_k))$ contient tout autant les points en contact statique continu avant le choc que ceux à l'origine de l'impact multiple considéré.

Indiçons à nouveau par S la partie relative à $\mathcal{I}_S(q)$ et par B celle relative à $\mathcal{I}_B(q)$.

La loi de choc multiple que nous avons choisi de considérer ici est celle proposée par Pfeiffer et Glocker dans [Pfeiffer et al., 1996, chapitre 8]. Nous l'avons déjà brièvement évoquée dans l'état de l'art. Elle est basée sur la loi de choc de Poisson, séparant l'impact en une phase de compression que nous indicerons par C, commençant à l'instant $t_A = t_k^-$ et se terminant à l'instant t_C, directement suivie dans le temps d'une phase d'expansion que nous indicerons par E, débutant à l'instant t_A pour se terminer à l'instant $t_E = t_k^+$.

Hypothèse III.3

Nous supposerons que le choc est inélastique et sans stockage tangentiel.

Dans ce cas particulier, la phase d'expansion disparaît car $\dot{q}_E = \dot{q}_C$ est solution du LCP correspondant à cette phase, voir [Pfeiffer et al., 1996, chapitre 8, pp. 130–133].

(III.19) peut se réécrire comme :

$$\dot{F}_{C,S} = 0 \tag{III.20}$$
$$\dot{F}_{tC,S} = 0 \tag{III.21}$$
$$\dot{F}_{C,B} > 0 \tag{III.22}$$

La fin de la phase de compression est caractérisée de la manière suivante :

- Comme $\lambda_{n,i} \geq 0, \forall t \in [t_A, t_C]$,
$$\Lambda_{nC,i} \geq 0, \quad \forall i \in I(q(t_k)) \tag{III.23}$$
- A la fin de la phase de compression, le processus d'approche entre les différents corps doit être terminé. Aussi est-il nécessaire d'exclure les valeurs négatives des vitesses relatives suivant la normale :
$$\dot{F}_{C,i} \geq 0, \quad \forall i \in I(q(t_k)) \tag{III.24}$$
- Si $\Lambda_{nC,i} = 0$, alors la contrainte correspondante est superflue, et $\dot{F}_{C,i}$ peut prendre n'importe quelle valeur positive. Dans le cas contraire, l'impact à la fin de la compression est donnée par $\dot{F}_{C,i} = 0$. D'où la relation de complémentarité :
$$\Lambda_{nC,i}\dot{F}_{C,i} = 0, \quad \forall i \in I(q(t_k)) \tag{III.25}$$

La loi d'impact dans la direction tangentielle est donnée par :

$$\mid \Lambda_{tC,i} \mid < \mu_{0,i}\Lambda_{nC,i} \quad \Rightarrow \quad \dot{F}_{tC,i} = 0 \tag{III.26}$$
$$\Lambda_{tC,i} = +\mu_{0,i}\Lambda_{nC,i} \quad \Rightarrow \quad \dot{F}_{tC,i} \leq 0 \tag{III.27}$$
$$\Lambda_{tC,i} = -\mu_{0,i}\Lambda_{nC,i} \quad \Rightarrow \quad \dot{F}_{tC,i} \geq 0 \tag{III.28}$$

Cette écriture découle de l'intégration de la loi d'Amontons-Coulomb sur la phase d'impact. Notons qu'elle n'implique pas que la force de frottement reste dans le cône durant toute la phase de choc. En effet, il est tout-à-fait possible que (III.26), (III.27) et (III.28) soient vérifiées alors que $\mid \lambda_{t,i} \mid$ dépasse $\mu_{0,i}\lambda_{n,i}$ sur certains sous-intervalles de $[t_A, t_C]$. Aussi (III.26), (III.27) et (III.28) doivent-elles être considérées comme une loi de choc indépendante suivant la tangente, qui coïncide néanmoins généralement avec la loi d'Amontons-Coulomb, voir [Pfeiffer et al., 1996, pp.110-116] pour de plus amples détails.

De la relation de complémentarité (III.25) entre $\dot{F}_{C,i}$ et $\Lambda_{nC,i}$, (III.22) entraîne que $\Lambda_{nC,B} = 0$ et donc, d'après la loi d'impact dans la direction tangentielle, que $\Lambda_{tC,B} = 0$.
Finalement, comme $h(q, \dot{q}, u) = Tu - N(q, \dot{q})$ rassemble des termes finis non-impulsionnels, la dynamique du choc, obtenue par l'intégration sur la phase de compression de la dynamique continue (III.5) se réduit à :

$$M(\dot{q}_C - \dot{q}_A) = \nabla F_S \Lambda_{nC,S} + G_S \Lambda_{tC,S} \tag{III.29}$$

que l'on peut réécrire comme :

$$M\dot{q}_C = M\dot{q}_A + \nabla F_S \Lambda_{nC,S} + G_S \Lambda_{tC,S} \tag{III.30}$$

Or $\dot{F}_{C,S} = \nabla F_S^T \dot{q}_C$. Il est donc facile de voir que tous les calculs effectués dans la section 2 s'appliquent à la loi de choc considérée par les substitutions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{F}_S & \longleftrightarrow & \dot{F}_{C,S} \\ \ddot{F}_{t,S} & \longleftrightarrow & \dot{F}_{tC,S} \\ \ddot{F}_B & \longleftrightarrow & \dot{F}_{C,B} \\ \ddot{q} & \longleftrightarrow & \dot{q}_C \\ f_S & \longleftrightarrow & 0 \\ f_{t,S} & \longleftrightarrow & 0 \\ f_B & \longleftrightarrow & 0 \\ h = Tu - N & \longleftrightarrow & M\dot{q}_A \\ \lambda_{n,S} & \longleftrightarrow & \Lambda_{nC,S} \\ \lambda_{t,S} & \longleftrightarrow & \Lambda_{tC,S} \end{array} \right.$$

Sous les hypothèses que ∇F_S et G_S sont de rang plein et que $\mathrm{Im}(G_S) \cap \mathrm{Im}(\nabla F_S) = \{0\}$, on déduit directement de (III.14) et (III.15) les expressions des impulsions normales et tangentielles :

$$\begin{aligned}
\Lambda_{tC,S} &= -\left(G_S^T M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} G_S\right)^{-1} G_S^T P^T_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} \dot{q}(t_k^-) \\
&\triangleq \overline{\Lambda}_{tC,S}(q(t_k))\dot{q}(t_k^-) \qquad \text{(III.31)} \\
\Lambda_{nC,S} &= -\left(\nabla F_S^T M^{-1} P_{G^{\perp}_{S/M^{-1}}} \nabla F_S\right)^{-1} \nabla F_S^T P^T_{G^{\perp}_{S/M^{-1}}} \dot{q}(t_k^-) \\
&\triangleq \overline{\Lambda}_{nC,S}(q(t_k))\dot{q}(t_k^-) \qquad \text{(III.32)}
\end{aligned}$$

étant donné que, comme précédemment, on a :

$$M^{-1} P_{G^{\perp}_{S/M^{-1}}} = P^T_{G^{\perp}_{S/M^{-1}}} M^{-1} \text{ et } M^{-1} P_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} = P^T_{\nabla F^{\perp}_{S/M^{-1}}} M^{-1}$$

De (III.18), la condition (III.22) impose que :

$$\begin{aligned}
\dot{F}_{C,B} &= \nabla F_B^T M^{-1} \left(M + \nabla F_S \overline{\Lambda}_{nC,S} + G_S \overline{\Lambda}_{tC,S}\right) \dot{q}(t_k^-) \\
&\triangleq \overline{\dot{F}}_{C,B}(q(t_k))\dot{q}t_k^- > 0 \qquad \text{(III.33)}
\end{aligned}$$

Finalement, de la proposition III.2, il vient le résultat similaire suivant :

Proposition III.3

Si ∇F_S et G_S sont de rang plein et si $Im(G_S) \cap Im(\nabla F_S) = \{0\}$, alors des conditions nécessaires et suffisantes sur la configuration à l'impact $q(t_k)$ et sur la vitesse pré-impact $\dot{q}(t_k^-)$ pour maintenir les points de contact $\mathcal{I}_S(q(t_k))$ en mode statique et pour forcer les autres points $\mathcal{I}_B(q(t_k)) = \mathcal{I}(q(t_k)) \setminus \mathcal{I}_S(q(t_k))$ à décoller sont :

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda}_{nC,S}(q(t_k))\dot{q}(t_k^-) &> 0 \qquad \text{(III.34)} \\
\left(\mu_{0,S}\overline{\Lambda}_{nC,S}(q(t_k)) + \overline{\Lambda}_{tC,S}(q(t_k))\right)\dot{q}(t_k^-) &> 0 \qquad \text{(III.35)} \\
\left(\mu_{0,S}\overline{\Lambda}_{nC,S}(q(t_k)) - \overline{\Lambda}_{tC,S}(q(t_k))\right)\dot{q}(t_k^-) &> 0 \qquad \text{(III.36)} \\
\overline{\dot{F}}_{C,B}(q(t_k))\dot{q}(t_k^-) &> 0 \qquad \text{(III.37)}
\end{aligned}$$

où les fonctions $\overline{\Lambda}_{nC,S}$, $\overline{\lambda}_{tC,S}$ et $\overline{\dot{F}}_{C,B}$ de la configuration à l'impact $q(t_k)$ sont données dans (III.32), (III.31) and (III.33).

4 Application à l'impact d'une jambe d'un bipendule

Le robot bipède que nous avons choisi d'étudier, que nous appellerons par la suite *compass*, consiste en deux jambes identiques de longueur L reliées à la hanche, voir figure III.1. Le compas est équivalent à un bi-pendule. La masse m de chaque jambe

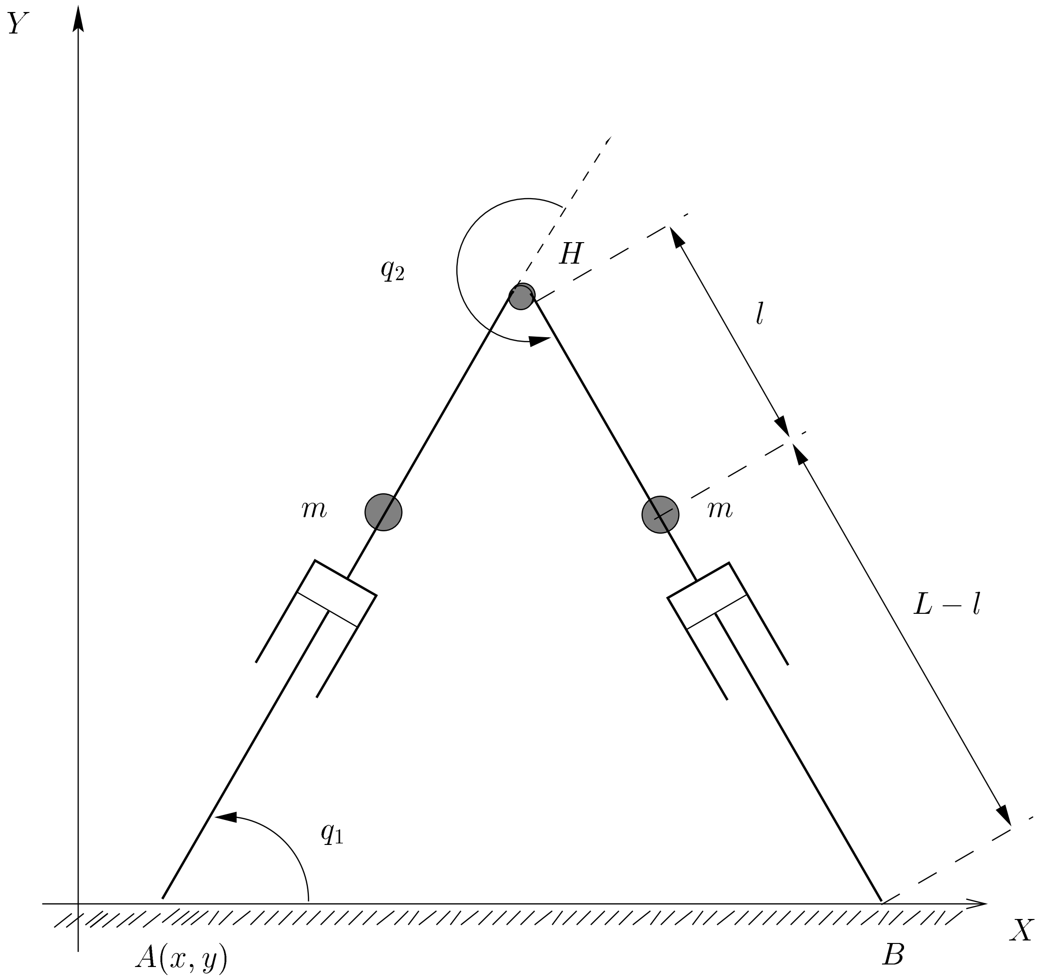

FIG. III.1 – *Modèle du robot bipède compas*

est concentrée à distance l et $L-l$ de la hanche et de l'extrémité de la jambe respectivement.

Comme un compas sans genou avec des jambes rigides ne peut pas passer la jambe arrière vers l'avant dans le plan, on peut imaginer qu'une articulation prismatique avec une jambe inférieure de poids négligeable est ajoutée juste en dessous de la

masse ponctuelle m, voir figure III.1. Le degré de liberté au niveau de la rallonge prismatique est évidemment bloqué à l'instant de l'impact. Ceci nous permet d'avoir un modèle réaliste simple sans pour autant compliquer la dynamique.
La configuration du robot est donnée par $q = (q_1, q_2, x, y)^T$ où q_1 désigne l'angle entre la jambe gauche et le sol et q_2 l'angle entre la jambe droite et la jambe gauche (l'orientation positive correspond au sens trigonométrique).
$(x, y)^T$ sont les coordonnées généralisées de l'extrémité de la jambe gauche A, par rapport à un repère cartésien fixé. Le vecteur d'état du compas est donné par $(q, \dot{q})^T$.

Le vecteur des contraintes de non-pénétration dans le sol des deux jambes du compas s'écrit :

$$F = \begin{pmatrix} y \\ y + L\sin(q_1) \\ y + L(\sin(q_1) + \sin(q_1 + q_2)) \end{pmatrix} \geq 0 \qquad \text{(III.38)}$$

correspondant aux coordonnées suivant l'axe Y des points A, H et B.

Supposons que la commande active durant la phase de balancement de la jambe droite soit capable de maintenir le point de support A au sol sans glissement et qu'à l'instant t_k, l'impact avec le sol de la jambe de balancement ait lieu. Alors dans ce cas :

$$\begin{aligned} q(t_k) &= (q_1((t_k), -2q_1(t_k), x(t_k), 0)^T & \text{(III.39)} \\ \dot{q}(t_k^-) &= \left(\dot{q}_1(t_k^-), \dot{q}_2(t_k^-), 0, 0\right)^T & \text{(III.40)} \\ \mathcal{I}(q(t_k)) &= (1, 3) & \text{(III.41)} \end{aligned}$$

Notre but est de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les vitesses pré-impact $\left(q(t_k), q(t_k^-)\right)$ pour que le transfert de support ait bien lieu, en assurant de plus que le nouveau point de support B ne glisse à l'issue du choc. Ceci peut-être traduit dans les notations de la section 3 en posant :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_S(q(t_k)) &= (3) \\ \mathcal{I}_B(q(t_k)) &= (1) \end{aligned}$$

De (III.39), il vient que :

$$\nabla F_S(q(t_k)) = \begin{pmatrix} 2L\cos(q_1(t_k)) \\ L\cos(q_1(t_k)) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$G_S(q(t_k)) = \begin{pmatrix} 0 \\ L\sin(q_1(t_k)) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il est immédiat que $\mathrm{Im}(G_S(q(t_k))) \cap \mathrm{Im}(\nabla F_S(q(t_k))) = \{0\}$. La proposition III.3 s'applique donc. Notons tout de même qu'une condition doit être ajoutée à celles de (III.34), (III.35), (III.36) et (III.37), à savoir, celle garantissant que l'impact de l'extrémité de la jambe de balancement B a réellement lieu à l'instant t_k, c'est-à-dire :

$$\nabla F_S(q(t_k))\dot{q}(t_k^-) < 0$$

Les figures III.2, III.3, III.4, III.5, III.6, III.7, III.8 et III.9, illustrent l'extension de l'espace des solutions avec l'augmentation du coefficient de frottement μ_0 à l'extrémité B, où les unités des axes sont respectivement rad/s pour $\dot{q}_1(t_k^-)$, rad/s pour $\dot{q}_2(t_k^-)$, et rad pour $q_1(t_k)$; $L = 1$ m, $l = 0.5$ m and $m = 1$ kg.

5 Conclusions

Les problèmes que nous avons traités dans ce chapitre ne semblent pas avoir été abordés dans la littérature, du moins à notre connaissance. La proposition III.2 permet de déterminer le domaine admissible des couples actionneurs garantissant non seulement le décollage de certains points de contact, mais aussi et surtout le non-glissement de points de support que l'on désirerait maintenir. La proposition III.3 donne des conditions sur les données pré-impact garantissant le décollage de certains points ainsi que maintien en non-glissement juste après l'impact.

Les deux propriétés énoncées sont d'un intérêt pratique indéniable, dans l'optique de l'élaboration d'une loi de commande pour un marcheur quelconque. Il paraît important de noter que ces propriétés, même si elles ont été développées sur l'exemple des robots marcheurs, peuvent trouver des applications directes à d'autres tâches robotiques comme celles d'assemblage ou de soudure.

Notons enfin que ce chapitre ne propose pas de loi de commande réelle. Il permet par contre d'établir des conditions nécessaires sur la commande et d'en tirer des conclusions sur l'adéquation de certains schémas de contrôle connus. En particulier, il semble que tout schéma, comme l'approche par fonction de tâche [Samson et al., 1991] que nous avions essayé d'appliquer dans une première étude sur les bipèdes, ne pouvant prendre en compte de manière explicite les contraintes d'inégalités que nous avons établies sur la loi de commande, soit inadéquat. A l'opposé, les approches basées sur la *commande sous contraintes*, comme les MPC (Model Predictive Control), paraissent, elles, toutes adaptées à traiter ce type de problème [Oliveira, 1996]. Notons tout de même que les problèmes posés par l'implémentation en temps réel de telles techniques demeurent présents, même si le gain considérable en puissance de calculs des derniers microprocesseurs semblent leur réserver un avenir prometteur.

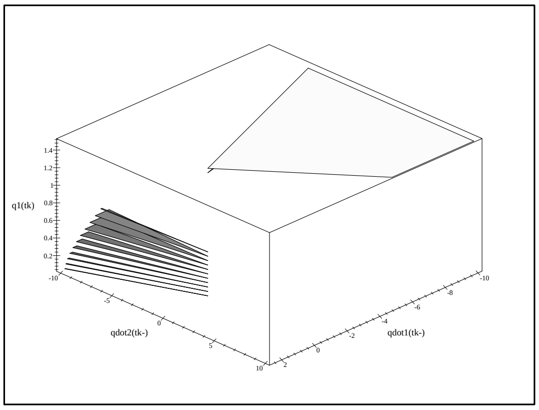

FIG. III.2 – *Espace des solutions pour* $\mu_0 = 0.2$

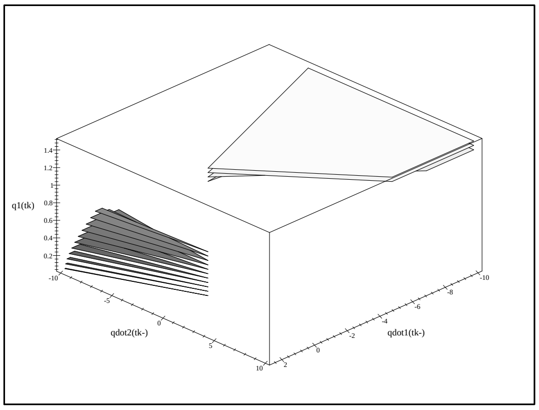

FIG. III.3 – *Espace des solutions pour* $\mu_0 = 0.4$

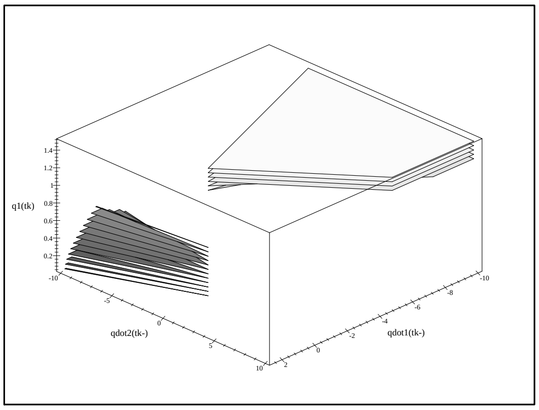

Fig. III.4 – *Espace des solutions pour* $\mu_0 = 0.6$

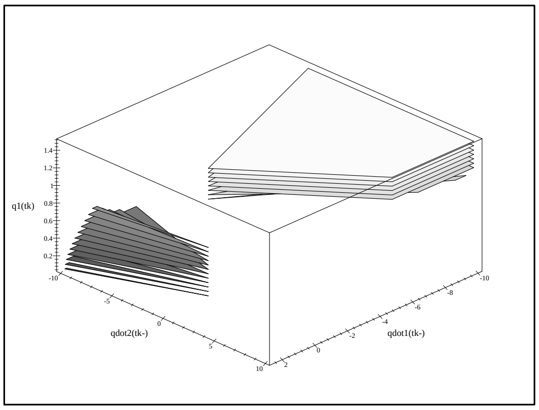

Fig. III.5 – *Espace des solutions pour* $\mu_0 = 0.8$

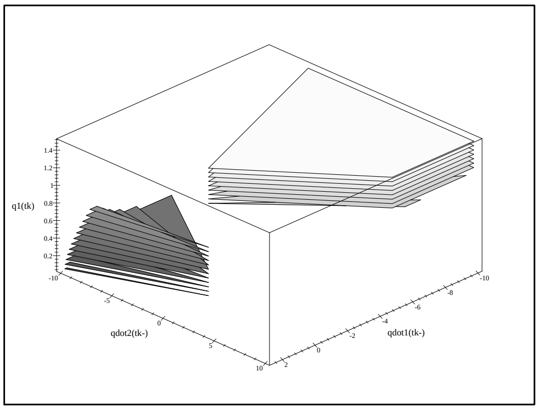

FIG. III.6 – *Espace des solutions pour* $\mu_0 = 1.0$

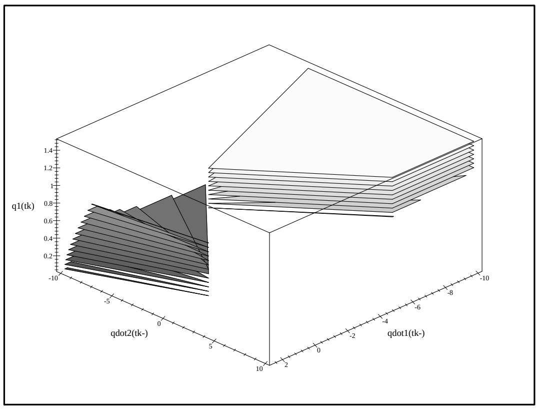

FIG. III.7 – *Espace des solutions pour* $\mu_0 = 1.2$

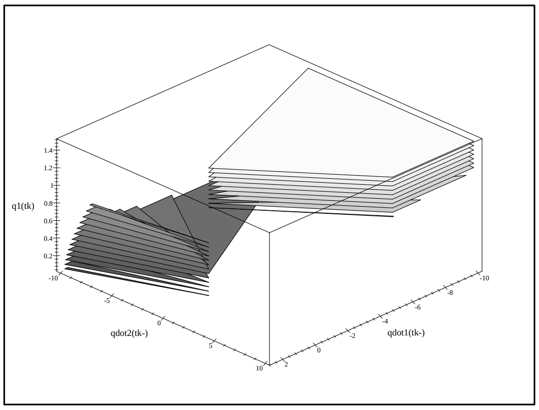

FIG. III.8 – *Espace des solutions pour* $\mu_0 = 1.4$

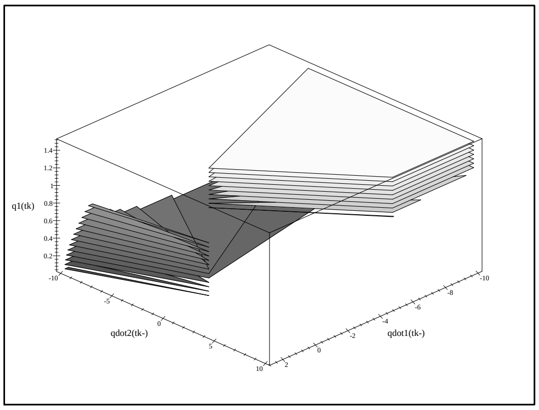

FIG. III.9 – *Espace des solutions pour* $\mu_0 = 1.6$

Conclusions et perspectives

Ce travail traite de la mécanique des systèmes de corps rigides avec contraintes unilatérales et frottement sec.

L'étude bibliographique du premier chapitre nous a permis de présenter les questions fondamentales consécutives au choix de cette modélisation : les problèmes d'existence et d'unicité de la trajectoire à intégrer. Nous avons vu que ces problèmes sont étroitement liés au calcul des forces de contact pouvant se ramèner à la résolution d'un LCP qui n'admet pas toujours de solution (unique) en présence de frottement régit par la loi de frottement d'Amontons-Coulomb.

Néanmoins l'étude du chapitre 2 sur l'exemple de Painlevé, qui était considéré peut-être jusqu'ici à tort comme l'illustration de l'existence d'une incompatibilité entre la loi de frottement d'Amontons-Coulomb et l'hypothèse de rigidité des corps, nous a permis de prouver que le système, s'il est initialisé en glissement dans un mode cohérent (au sens où le LCP admet une solution unique) évite les zones d'inconsistances : soit le point de contact finit par s'arrêter de glisser et le système entre dans le mode consistant du contact statique, soit la barre décolle et la force de contact demeurant toujours bornée, soit finalement, pour des coefficients de frottement supérieurs à une valeur seuil jusqu'ici inconnue de la communauté, la trajectoire passe par un point singulier correspondant à la frontière commune à tous les modes. Au point singulier, la force de contact prend une valeur infinie, mais l'impulsion de cette force reste bornée ce qui confirme la consistance du modèle. Ce chapitre constitue la contribution principale de cette thèse au domaine. Les techniques que nous avons employées pour cette analyse nous laissent penser que nos travaux théoriques sur cet exemple simple doivent pouvoir s'étendre à des systèmes plus complexes, à plus de degrés de liberté et plusieurs contacts.
Un autre problème se pose lorsque la barre retombe dans une zone inconsistante : que penser d'une loi de choc ne nous permettant pas de sortir de cette zone ? Et plus précisément : existe-t'il toujours une impulsion cohérente du point de vue énergétique et vérifiant la loi d'Amontons-Coulomb nous permettant de revenir à un état consistent ? Et dans le cas où une telle loi existe, s'étend-elle aussi à des systèmes plus complexes ? Ces questions fondamentales nous laissent deviner les difficultés

sous-jacentes à la réalisation d'un outil de simulation numérique complet prenant en compte les impacts sans collision. Néanmoins cette thèse a donné lieu à la conception de deux logiciels dédiés à la simulation des robots marcheurs :

- *RobotDyn* : outil de génération automatique de équations de la dynamique de Lagrange des robots rigides arborescents. Ce logiciel, décrit dans l'annexe E, est encapsulé dans un package de calcul formel et présente par conséquent l'avantage d'offrir des expressions purement symboliques souvent indispensables pour la synthèse de lois de commande. Il permet la création automatique de fonctions fortran des différents termes de la dynamique.

- *RobotSimu* : outil d'intégration de la dynamique des systèmes de corps rigides avec contraintes unilatérales. Ce logiciel a été écrit dans le langage Scilab développé à l'INRIA. Il exploite les fonctions fortran générées par *RobotDyn* pour intégrer la dynamique. L'intégration est réalisée de manière usuelle en construisant et résolvant à chaque instant de la discrétisation un LCP, dont la solution, si elle existe, livre les accélérations et les forces de contact de l'instant considéré. La loi de frottement sec d'Amontons-Coulomb est prise en compte dans le cas de contacts 2D. L'extension au cas des contacts 3D est facilement envisageable. Même s'il semble raisonnable de supposer que les problèmes d'inconsistances et d'indéterminations ne devraient pas apparaître dans la simulation de robots marcheurs (les coefficients de frottement au sol étant généralement trop faibles), signalons l'existence de schémas d'intégration ("time-stepping scheme") dédiés à la simulation des systèmes de corps rigides avec contraintes unilatérales [Moreau, 1986; Moreau et al., 1988; Stewart et al., 1996; Stewart, 1997; Stewart, 1998; Anitescu et al., 1996]. Ces schémas travaillent non pas au niveau force/accélération mais bien plutôt au niveau impulsion/vitesse, généralement bien posé [Monteiro-Marques, 1993; Stewart, 1998].

Enfin le chapitre 3 nous a permis, sous une hypothèse relativement faible sur les contraintes actives, d'établir des conditions nécessaires et suffisantes sur la loi de commande et sur les vitesses pré-impact permettant d'assurer le non-glissement des points de contacts. Remarquons que ces contraintes sont fonctions de l'état courant du système, si bien qu'il n'est a priori pas garanti que l'ensemble des solutions soit non-vide. De plus, des bornes sur les actionneurs sont à prendre en considération dans la pratique : ces bornes risquent de réduire encore l'ensemble des commandes admissibles. Aussi l'étape suivante de la conception de loi de commande en boucle fermée assurant la "stabilité" au sens des conditions énoncées dans ce chapitre risque-t-elle de poser de nombreuses difficultés.

Bibliographie

[Anitescu et al., 1996] M. Anitescu, F.A. Potra, 1996 “Formulating dynamic multi-rigid-body contact problems with friction as solvable linear complementarity problems”, *Reports on Computational Mathematics*, **93/1996**, Department of Mathematics, Univ. IOWA.

[Bainov et al., 1989] D.D. Bainov, P.S. Simeonov, 1989, *Systems with impulse effects; stability, theory and applications*, Ellis Horwood series in Mathematics and its Applications, Wiley.

[Baraff, 1993] D. Baraff, 1993, “Issues in computing contact forces for non-penetrating rigid bodies”, *Algorithmica*, vol. **10**, pp. 292-352.

[Baraff, 1994] D. Baraff, 1994, “Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies”, *SIGGRAPH 94*, Orlando, pp. 23-34, Juillet.

[Batlle, 1993] J.A. Batlle, 1993, “On Newton’s and Poisson’s rules of percussive dynamics”, *ASME J. of Applied Mechanics*, vol. **60**, pp. 376-381.

[Bolotov, 1906] E.A. Bolotov, 1906, “On the motion of a material plane figure, constrained by connections with friction”, *Universitetskaya tip.*, Moscou.

[Brach, 1991] R.M. Brach, 1991, *Mechanical Impact Dynamics*, John Wiley, New York.

[Brach, 1997] R.M. Brach, 1997, “Impact coefficients and tangential impacts”, *ASME J. of Applied Mechanics*, vol. **64**, n° **4**, pp. 1014-1016.

[Bressan, 1959] A. Bressan, 1959, “Incompatibilità dei teoremi di esistenza e di unicità del moto per un tipo molto comune e regolare di sistemi meccanici”, *Rend. Scu. Norm. di Pisa*, pp. 333-348.

[Brogliato, 1996] B. Brogliato, 1996, *Nonsmooth Impact Mechanics : Models, Dynamics and Control*, Springer Verlag, LNCIS **220**.

[Brogliato et al., 1997] B. Brogliato, S.I. Niculescu, P. Orhant, 1997, "On the control of finite dimensional mechanical systems with unilateral constraints", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. **42**, n° **2**, pp. 200-215.

[Chatterjee, 1997] A. Chatterjee, 1997, *Rigid body collisions : some general considerations, new collision laws, and some experimental data*, Ph.D. Thesis, Cornell University, College of Engineering, Janvier.

[Chevallereau et al., 1997] C. Chevallereau, A. Formal'sky, B. Perrin, 1997, "Control of a walking robot with feet following a reference trajectory derived from ballistic motion", *IEEE Conf. Robotics and Automation*, 20-25 Avril, Albuquerque, New Mexico, USA.

[Cottle et al., 1968] R.W. Cottle, G.B. Dantzig, 1968, "Complementary pivot theory of mathematical programming", *Linear Algebra and its Applications*, vol. **1**, pp. 103-125.

[Cottle et al., 1992] R.W. Cottle, J.S. Pang, R.E. Stone, 1992, *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, Boston, Massachusetts.

[Daniela, 1995] C.E. Daniela, 1995, *Contribution à l'étude des chocs multiples entre solides rigides*, Projet de fin d'études, LAG, Grenoble.

[Delassus, 1917] E. Delassus, 1917, "Mémoire sur la théorie des liaisons finies unilatérales", *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.*, **34**, pp. 95-179.

[Dupont, 1992] P.E. Dupont, 1992, "The effect of Coulomb friction on the existence and uniqueness of the forward dynamics problem", *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1442-1447, Nice, France, Mai.

[Dorn, 1960] W.S. Dorn, 1960, "Duality in quadratic programming", *Quaterly of Applied Mathematics*, vol. **18**, n° **2**, pp. 155-162.

[Erdmann, 1994] M. Erdmann, 1994, "On a representation of friction in configuration space", *Int. Journal of Robotics Research*, vol. **13**, n° **3**, pp. 240-271.

[Filipov, 1996] A.F. Filipov, 1996, "Application of the axiomatic method for the investigation of differential equations with singularities", *Differential Equations*, vol. **32**, n° **2**, pp. 208-218.

[Fischer, 1992] A. Fischer, 1992, "A special Newton-type optimization method", *Optimization*, vol. **24**, pp. 269-284.

[Génot et al., 1997] F. Génot, B. Brogliato, R. Brach, B. Thuilot, 1997, "On LCPs and tangential impacts in rigid body mechanics with unilateral constraints and dry friction", *IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO'97)*, 3-5 Septembre, Nantes, France.

[Han et al., 1993a] I. Han, B.J. Gilmore, 1993, "Multi-body impact motion with friction – Analysis, simulation and experimental validation", *ASME J. of Mechanical Design*, vol. **115**, pp. 412-422.

[Han et al., 1993b] I. Han, B.J. Gilmore, M.M. Ogot, 1993, "The incorporation of arc boundaries and stick-slip friction in a rule-based simulation algorithm for dynamic mechanical systems with changing topologies", *ASME J. of Mechanical Design*, vol. **115**, pp. 423-434.

[Haug et al., 1986] E.J. Haug, S.C. Wu, S.M. Yang, 1986, "Dynamics of mechanical systems with Coulomb friction, stiction, impact and constraint addition-deletion", *Mechanisms and Machine Theory*, vol. **21**, n° **5**, pp. 401-406.

[Hurmuzlu et al., 1986] Y. Hurmuzlu, G.D. Moskowitz, 1986, "The role of impact in the stability of bipedal locomotion", *Dynamics and Stability of Systems*, vol. **1**, n° **3**, pp. 217-234.

[Hurmuzlu et al., 1987] Y. Hurmuzlu, G.D. Moskowitz, 1987, "Bipedal locomotion stabilized by impact and switching : I. Two and three dimensional, three elements models, II. Structural stability analysis of a four element bipedal locomotion model", *Dynamics and Stability of Systems*, vol. **2**, n° **2**, pp. 73-112.

[Hurmuzlu, 1993] Y. Hurmuzlu, 1993, "Dynamics of bipedal gait ; Part I - Objective functions and the contact event of a planar five link biped. Part II - Stability analysis of a planar five link biped", *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. **60**, n° **2**, pp. 331-344.

[Hurmuzlu et al., 1994] Y. Hurmuzlu, D.B. Marghitu, 1994, "Rigid body collisions of planar kinematic chains with multiple contact points", *Int. J. of Robotics Research*, vol. **13**, n° bf 1, pp. 82-92.

[Hurmuzlu, 1998] Y. Hurmuzlu, 1998, "An energy based coefficient of restitution for planar impacts of slender bars with massive external surfaces", *ASME J. of Applied Mechanics*, à paraitre.

[Ivanov, 1986] A.P. Ivanov, 1986, "On the correctness of the basic problem of dynamics in systems with friction", *Prikl. Matem. Mekhan.*, vol. **50**, n° **5**, pp. 547-550.

[Ivanov, 1995] A.P. Ivanov, 1995, "On multiple impacts", *Prikl. Math. Mekh.*, **59:6**, pp. 930-946. *Transl. in J. of Appl. Mech.*, vol. **59**, n° **6**, pp. 887-902.

[Jean, 1993] M. Jean, 1993, "Simulation numérique des problèmes de contact avec frottement", *Matériaux et Techniques*, n^{os} **1-2-3**, pp. 22-32.

[Jellet, 1872] J.H. Jellet, 1872, *A treatise on the theory of friction*, Hodges, Foster and Co.

[Kanzow, 1996] C. Kanzow, 1996, "Nonlinear complementarity as unconstrained optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. **88**, n° **1**, pp. 139-155.

[Khalil, 1996] H.K. Khalil, 1996, *Nonlinear Systems*, Second Edition, Prentice-Hall.

[Kilmister et al., 1966] C.W. Kilmister, J.E. Reeve, 1966, *Rational mechanics*, London, Longman.

[Kozlov et al., 1991] V.V. Kozlov, D.V. Treshchev, 1991 *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[Kuhn et al., 1951] H.W. Kuhn, A.W. Tucker, 1951 "Nonlinear programming", *Proceedings of the second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Ed. J. Neyman, University of California, Press.

[Le Cam, 1990] L. Le Cam, 1990 "Maximum Likelihood : An Introduction", *International Statistical Review*, vol. **58**, n° **2**, pp. 153-171.

[Lecornu, 1905] L. Lecornu, 1905, "Sur la loi de Coulomb", *Comptes-rendus Acad. Sci. Paris*, **140**, pp. 847-848.

[Lötstedt, 1981] P. Lötstedt, 1981, "Coulomb friction in two-dimensional rigid-body systems", *Zeitschrift für Ang. Math. und Mech.*, vol. **61**, pp. 605-615.

[Löststedt, 1982] P. Lötstedt, 1982, "Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints", *SIAM J. Appl. Math.*, vol. **42**, n° **2**, pp. 281-296.

[Löststedt, 1984] P. Lötstedt, 1984, "Numerical simulation of time-dependent contact and friction problems in rigid body mechanics", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, vol. **5**, n° **2**, pp. 370-393.

[Marghitu et al., 1996] D.B. Marghitu, Y. Hurmuzlu, 1996, "Nonlinear dynamics of an elastic rod with frictional impact", *Nonlinear Dynamics*, vol. **10**, pp. 187-201.

[Monteiro-Marques, 1993] M.D.P. Monteiro-Marques, 1993 *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems : Shocks and Dry Friction*, Birkhauser, Boston PNLDE 9.

[Mason et al., 1988] M.T. Mason, Y. Wang, 1988, "On the inconsistency of rigid-body frictional planar mechanics", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 524-528, Avril.

[Matrosov et al., 1994] V.M. Matrosov, I.A. Finogenko, 1994, "The solvability of the equations of motion of mechanical systems with sliding friction", *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. **58**, n° **6** , pp. 3-13, *J. of Applied Maths. Mechs.*, vol. **58**, n° **6**, pp. 945-954.

[Moreau, 1963] J.J. Moreau, 1963, "Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss", *C.R. Acad. Sciences Paris*, **256**, pp. 871-874.

[Moreau, 1966] J.J. Moreau, 1966, "Quadratic programming in mechanics : dynamics of one sided constraints", *J. SIAM Control*, vol. **4**, n° **1**, pp. 153-158.

[Moreau, 1985] J.J. Moreau, 1985, "Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints", *Unilateral Problems in Structural Analysis*, G. Del Piero and F. Maceri (editors), CISM Courses and Lectures n° **288**, Springer-Verlag.

[Moreau, 1986] J.J. Moreau, 1986, "Dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel ; essais numériques", *Tech. note* **85-1**, LMGC, Université du Languedoc, Montpellier, France.

[Moreau et al., 1988] J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulus, (Eds.), 1988, "Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics", *Nonsmooth mechanics and applications*, CISM Courses and Lectures n° **302**, Springer Verlag, pp. 1-82.

[Moreau, 1994] J.J. Moreau, 1994, "Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials", *European J. of Mechanics A/Solids*, vol. **13**, n° **4**, pp. 93-114.

[Neimark, 1995] Y.I. Neimark, 1995, "Painlevé paradoxes revisited", *Mechanics of Solids*, vol. **30**, n° **1**, pp. 15-19 (Izvestiya RAN, *Mekhanika Tverdogo Tela*, n° **1**, pp. 17-21, 1995).

[Newby Jr., 1979] N.D. Newby Jr., 1979, "Linear collisions with harmonic oscillator forces : the inverse scattering problem", *American Journal of Physics*, vol. **47**, pp. 161-165.

[Oliveira, 1996] S. L. De Oliveira, 1996, *Model Predictive Control (MPC) for Constrained Systems*, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, March.

[Painlevé, 1895] P. Painlevé, 1895, *Leçon sur le frottement*, Hermann, Paris.

[Painlevé, 1905] P. Painlevé, 1905, "Sur les lois du frottement de glissement", *C.R. Acad. Sci. Paris*, **121**, pp. 112-115; **141**, pp. 401-405; **141**, pp. 546-552.

[Pang et al., 1996] J.S. Pang, J.C. Trinkle, 1996, "Dynamic multi-rigid-body systems with concurrent distributed contacts", submitted to the *Journal of Applied Mechanics*.

[Paoli et al., 1993] L. Paoli, M. Schatzman, 1993, "Mouvement à nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales : cas avec perte d'énergie", *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* (*Modélisation mathématique et analyse numérique*), vol. **27**, n° **6**, pp. 673-717.

[Paoli, 1993] L. Paoli, 1993, *Analyse numérique de vibrations avec contraintes unilatérales*, Ph.D. Thesis, Université Claude Bernard - Lyon 1, Laboratoire d'Analyse Numérique, France.

[Percivale, 1985] D. Percivale, 1985 "Uniqueness in the elastic bounce problem", *Journal of Differential Equations*, **56**, pp. 206-215.

[Percivale, 1991] D. Percivale, 1991, "Uniqueness in the elastic bounce problem, II", *Journal of Differential Equations*, **90**, pp. 304-315.

[Peres, 1953] J. Pérès, 1953, *Mécanique générale*, Masson, Paris.

[Perrin et al., 1997] B. Perrin, C. Chevallereau, A. Formal'sky, 1997, "Control of a quadruped walking robot without feet for a gallop gait", *IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO'97)*, 3-5 Septembre, Nantes, France.

[Pfeiffer et al., 1996] F. Pfeiffer, C. Glocker, 1996 *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*, Wiley Series in Nonlinear Science.

[van der Schaft et al., 1996a] A.J. van der Schaft, J.M. Schumacher, 1996, "The complementary-slackness class of hybrid systems", *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. **9**, pp. 266-301.

[van der Schaft et al., 1996b] A.J. van der Schaft, J.M. Schumacher, 1996, "Complementarity modeling of hybrid systems", *CWI Report* **BS-R9611**, Aout.

[Samson et al., 1991] C. Samson, M. Le Borgne, B. Espiau, 1991, *Robot Control : The Task Function Approach*, Oxford Press.

[Schatzman, 1978] M. Schatzman, 1978, “A class of nonlinear differential equations of second order in time”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, vol. **2**, n° **3**, pp. 355-373.

[Schatzman, 1995] M. Schatzman, 1995, “Uniqueness and continuous dependence on data for one-dimensional impact problem”, *Math. Comput. Modeling.*

[Spong et al., 1989] M.W. Spong M.W. and M. Vidyasagar, 1989, *Robot dynamics and control*, New York, NY : John Wiley & Sons.

[Stewart et al., 1996] D.E. Stewart, J.C. Trinkle, 1996, “An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and Coulomb friction”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. **39**, n° **15**, pp. 2673-2691.

[Stewart, 1997] D.E. Stewart, 1997, “Existence of solutions to rigid body dynamics and the Painlevé paradoxes”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **325**, Série **1**, pp.689-693.

[Stewart, 1998] D.E. Stewart, 1998, “Convergence of a time-stepping scheme for rigid body dynamics and resolution of Painlevé's paradoxes”, soumis à *Arch. Rational Mechanics.*

[Stoianovici et al., 1996] D. Stoianovici, Y. Hurmuzlu, 1996, “A critical study of the applicability of rigid body collision theory”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. **63**, n° **2**, pp. 307-316.

[Stronge, 1990] W.J. Stronge, 1990, “Rigid body collision with friction”, *Proc. R. Soc. Lond. A.*, vol. **431**, pp. 169-181.

[Tendam et al., 1997] A.A. Ten Dam, E. Dwarshuis, J.C. Willems, 1997, “The contact problem for linear continuous time dynamical system : a geometric approach” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. **42**, n° **4**.

[Trinkle et al., 1995] J.C. Trinkle, J.S. Pang, S. Sudarsky, and G. Lo, 1995, “On dynamic multi-rigid-body contact problems with Coulomb friction”, *Tech. Report* **95-003**, Texas A & M University, Departement of Computer Science.

[Wang et al., 1992] Y. Wang, M. Mason, 1992, “Two-dimensional rigid-body collisions with friction”, *ASME J. of Applied Mechanics*, vol. **59**, pp. 635-642.

[Whittaker, 1994] E.T. Whittaker, 1904, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press.

Annexe A

Autre analyse du cas $\frac{4}{3} \leq \mu < \mu_C$

Hypothèse A.1

Nous supposerons que $P_{c1} = P_{c1}^{+}$, c'est-à-dire que le point singulier est atteint à partir de $\mathcal{M}_1^{+}$.

Lemme A.1

Si $\ddot{\theta}$ admet une limite finie lorsque $\theta \rightarrow \theta_{c1}^{-}$, alors $\dot{\theta}$ admet aussi une limite finie en ce point et :

$$\dot{\theta}_{c1}^{-} = \sqrt{\frac{g}{l \sin \theta_{c1}}} \tag{A.1}$$

$$\ddot{\theta}_{c1}^{-} = \frac{\dot{\theta}_{c1}^{-\,2} \cos \theta_{c1}(-\cos \theta_{c1} + \mu \sin \theta_{c1})}{4 \cos \theta_{c1}(\mu \cos \theta_{c1} + \sin \theta_{c1}) - 3\mu} \tag{A.2}$$

Démonstration

Il est immédiat que la fonction $\frac{ml}{3}\mathcal{C}(\theta, \mu) = -\cos\theta + \mu \sin\theta$ est strictement positive pour $\arctan \frac{1}{\mu} < \theta \leq \theta_{c1}$. En conséquence, si $\ddot{\theta}$ admet une limite finie lorsque $\theta \rightarrow \theta_{c1}^{-}$, alors, à la vue de l'équation différentielle (II.8), comme $\mathcal{B} \rightarrow 0^{-}$, nécessairement $\dot{\theta}_{c1}^{-}$ doit satisfaire l'équation (A.1).
En développant en series de Taylor avec reste de Young les deux membres de l'équation différentielle (II.8), et en collectant les termes en $\ddot{\theta}_{c1}^{-}$, on obtient finalement après des simplications trigonométriques l'expression donnée dans (A.2). $\diamond$

Regardons maintenant de plus l'expression de $\ddot{\theta}_{c1}^-$ donnée dans (A.2). De (II.7), il est aisé de prouver que le numérateur de $\ddot{\theta}_{c1}^-$ est toujours positif. En remplaçant les expressions de θ_{c1}^- et $\dot{\theta}_{c1}^-$ données dans les équations (II.7) et (A.1), on déduit après des calculs fastidieux mais faciles que le dénominateur de $\ddot{\theta}_{c1}^-$ est négatif pour $\mu < \mu_c = \frac{8}{3\sqrt{3}}$ et positif pour $\mu > \mu_c$.

La difficulté principale consiste maintenant à prouver que $\ddot{\theta}$ admet une limite finie.

Lemme A.2

Si $\frac{4}{3} \le \mu < \mu_C$, alors la trajectoire $(\theta, \dot{\theta})$ coupe la courbe $\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta}) = 0$ avant que θ atteigne θ_{c1}.

Démonstration

La preuve se base sur une raisonnement par l'absurde. Grosso modo, nous allons prouver que si $\mathcal{A}$ demeure strictement positive, alors $\ddot{\theta}$ admet une limite positive finie. Or de (A.2), nous savons que cette limite doit être strictement négative, d'où une contradiction prouvant que la courbe $\mathcal{A}$ doit être coupée avant que $\theta = \theta_{c1}$.
Supposons que $\forall t \in [0, t_{c1}], \mathcal{A} > 0$. En conséquence, $\ddot{\theta}$ est strictement positive.
Afin de simplifier les notations, réécrivons (II.8) sous la forme :

$$\ddot{\theta} = f(\theta, \mu)(g - l\dot{\theta}^2 \sin\theta). \tag{A.3}$$

En dérivant une fois l'équation précédente, on obtient que :

$$\theta^{(3)} = \dot{\theta}(H(\theta, \mu)\mathcal{A}(\theta, \dot{\theta}) - lf(\theta, \mu)\dot{\theta}^2 \cos\theta) \tag{A.4}$$

où :

$$H(\theta, \mu) = \frac{\partial f}{\partial \theta} - 2lf^2 \sin\theta \tag{A.5}$$

Il est alors aisé de prouver que $H(\theta, \mu)$ change de signe et devient strictement négative avant que θ n'atteigne θ_{c1}. D'où, comme $f(\theta, \mu)$ est manifestement positive, il existe un voisinage gauche de t_{c1} dans lequel $\theta^{(3)}(t)$ est strictement négatif.
Revenons maintenant à $\ddot{\theta}(t)$. C'est une fonction positive décroissante sur le voisinage cité plus haut. Par conséquent, $\ddot{\theta}$ admet une limite finie en $\theta = \theta_{c1}$, à savoir celle donnée dans (A.2). Mais comme nous l'avons prouvé dans le lemme précédent A.1, cette limite se doit d'être strictement négative. On en déduit que, comme $\ddot{\theta}$ est strictement positive à partir de l'instant où θ a passe la valeur $\arctan\frac{1}{\mu}$, il existe un instant $t_{\mathcal{A}} \in [0, t_{c1})$ auquel $\ddot{\theta}(t)$ change de signe. A cet instant, on a $\mathcal{A}(t_{\mathcal{A}}) = 0$, en contradiction avec l'hypothèse. ◇

Annexe B

Impacts sans collision

1 Introduction

Hypothèse B.1

Nous supposerons que $X(t_k^-) \in \mathcal{M}_2$.

Dans ce cas, le LCP n'a pas solution et il faut avoir recours à un saut en vitesse pour sortir de l'inconsistance.

Rappelons les règles de base sur les impacts tangentiels :

Définition B.1

Si un impact sans collision se produit à l'instant t_k*, alors les conditions suivantes doivent être vérifiées :*

1. $T(t_k^+) \leq T(t_k^-)$,
2. $\dot{y}_A(t_k^+) = 0$,
3. $P \in \mathcal{C}$, *où* $P \in \mathbf{R}^2$ *désigne le vecteur de percussion, et* $\mathcal{C}$ *le cône de frottement,*
4. *Le LCP admet une solution à* t_k^+*, c'est-à-dire à l'issue de l'impact sans collision.*

Les conditions 1 et 2 imposent que les vitesses post-impact $\dot{x}_A(t_k^+)$ et $\dot{\theta}(t_k^+)$ sont à l'intérieur d'un sous-ensemble compact de $\mathbf{R}^2$.

La dynamique de l'impact pour l'exemple de Painlevé est donnée par :

$$m\Delta\dot{x} = \Lambda_t \tag{B.1}$$

$$m\Delta\dot{y} = \Lambda_n \tag{B.2}$$

$$\frac{ml^2}{3}\Delta\dot{\theta} = l\left(-\cos\theta\Lambda_n + \sin\theta\Lambda_t\right) \tag{B.3}$$

On sait que :

$$\dot{y}_A(t_k^-) = 0 \Rightarrow \dot{y}(t_k^-) = l\theta(t_k^-)\cos\theta$$

Il vient de même de la condition 2 que :

$$\dot{y}_A(t_k^+) = 0 \Rightarrow \dot{y}(t_k^+) = l\theta(t_k^+)\cos\theta$$

d'où on déduit finalement que :

$$\Delta\dot{y} = \dot{y}(t_k^+) - \dot{y}(t_k^-) = l\cos\theta\Delta\dot{\theta} \tag{B.4}$$

D'où, en substituant dans (B.2) l'expression de $\Delta\dot{y}$ donnée dans (B.4) :

$$\Lambda_n = ml\cos\theta\Delta\dot{\theta} \tag{B.5}$$

et en faisant de même pour (B.3), on aboutit à :

$$\Lambda_t = \frac{ml}{3\sin\theta}\left(1 + 3\cos^2\theta\right)\Delta\dot{\theta} \tag{B.6}$$

Constatons déjà que la solution $\Delta\dot{\theta} = 0$ entraîne que $\Lambda_n = \Lambda_t = 0$, et donc, de (B.1) et (B.2), que $\Delta\dot{x} = \Delta\dot{y} = 0$, ne remplissant évidemment pas la condition 4. En conséquence, nous supposerons dans la suite que :

$$\Delta\dot{\theta} \neq 0$$

La condition 3 exprime que :

$$\Lambda_n \geq 0 \tag{B.7}$$

$$|\Lambda_t| \leq \Lambda_n \tag{B.8}$$

En conséquence, il vient finalement de (B.5) et (B.7) que (rappelons que $X(t_k^-) \in \mathcal{M}_2 \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$) :

$$\Delta\dot{\theta} > 0 \Rightarrow \Lambda_n > 0,\ \Lambda_t > 0 \tag{B.9}$$

De (B.5) et (B.6), on déduit que (B.8) est équivalente à :

$$1 + 3\cos\theta\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right) = \mathcal{B}(\theta, \mu) \leq 0$$

qui est toujours vérifiée, d'après l'hypothèse B.1. Par ailleurs, ceci nous permet aussi de voir qu'aucun impat tangentiel n'est admissible dans le mode $\mathcal{M}_1$.
Posons :

$$\mu(\theta) = \frac{\Lambda_t}{\Lambda_n} = \frac{1 + 3\cos^2\theta}{3\sin\theta\cos\theta} > 0$$

La dynamique (B.1), (B.2) et (B.3) se réécrit alors en fonction de l'impulsion normale :

$$\Delta\dot{x} = \frac{\mu(\theta)}{m}\Lambda_n \tag{B.10}$$

$$\Delta\dot{y} = \frac{1}{m}\Lambda_n \tag{B.11}$$

$$\Delta\dot{\theta} = \frac{3}{ml}\left(-\cos\theta + \mu(\theta)\sin\theta\right)\Lambda_n = \frac{1}{ml\cos\theta}\Lambda_n \tag{B.12}$$

Notre but est maintenant d'exprimer la condition 1. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta T &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2(t_k^+) + \dot{y}^2(t_k^+) + \frac{l^2}{3}\dot{\theta}^2(t_k^+) - \dot{x}^2(t_k^-) - \dot{y}^2(t_k^-) - \frac{l^2}{3}\dot{\theta}^2(t_k^-)\right) \\
&= \frac{1}{2}m\left(\Delta\dot{x}\left(\Delta\dot{x} + 2\dot{x}(t_k^-)\right) + \Delta\dot{y}\left(\Delta\dot{y} + 2\dot{y}(t_k^-)\right) + \frac{l^2}{3}\Delta\dot{\theta}\left(\Delta\dot{\theta} + 2\dot{\theta}(t_k^-)\right)\right)
\end{aligned}$$

soit, après simplications :

$$\Delta T = \Lambda_n\left(a\Lambda_n + b\right) \tag{B.13}$$

où :

$$a = \frac{2\left(1 + 3\cos^2\theta\right)}{9m\sin^2\theta\cos^2\theta} > 0$$

et

$$b = \mu(\theta)\dot{x}_A(t_k^-) < 0$$

Finalement, de (B.13), la condition 1 s'écrit :

$$0 \le \Lambda_n \le -\frac{b}{a} \tag{B.14}$$

Il nous reste maintenant à traduire la condition 4 permettant d'avoir un problème bien posé en post-impact. On a :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_A(t_k^+) &= \dot{x}(t_k^+) + l\sin\theta\dot{\theta}(t_k^+) \\
&= \dot{x}(t_k^-) + \Delta\dot{x} + l\sin\theta\left(\dot{\theta}(t_k^-) + \Delta\dot{\theta}\right) \\
&= \dot{x}_A(t_k^-) + \frac{1}{m}\left(\mu(\theta) + 3\sin\theta\left(-\cos\theta + \mu(\theta)\sin\theta\right)\right)\Delta_n
\end{aligned}$$

soit, après simplifications :

$$\dot{x}_A(t_k^+) = \dot{x}_A(t_k^-) + \frac{4\Lambda_n}{3m\sin\theta\cos\theta} \tag{B.15}$$

Les conditions regroupant (B.9) et (B.14) se résument à :

$$0 < \Lambda_n \leq -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}m\sin\theta\cos\theta\dot{x}_A(t_k^-) \tag{B.16}$$

ce qui, au niveau de la vitesse post-impact, en utilisant (B.15), impose :

$$\dot{x}_A(t_k^-) < \dot{x}_A(t_k^+) \leq -\dot{x}_A(t_k^-) \tag{B.17}$$

2 Solutions avec $\dot{x}_A(t_k^+) < 0$

De (B.15), il vient que :

$$\Lambda_n < -\frac{3}{4}m\sin\theta\cos\theta\dot{x}_A(t_k^-) \tag{B.18}$$

Il est immédiat que si $\dot{x}_A(t_k^+) < 0$ (on reste dans le mode M_{II} du système hybride), alors nécessairement $\dot{\theta}^2(t_k^+) \geq \frac{g}{l\sin\theta}$ pour sortir de la zone inconsistante $\mathcal{M}_2$ et aller dans la zone, certes indéterminée mais néanmoins acceptable $\mathcal{M}_4$. Or, de (B.5), on a :

$$\dot{\theta}(t_k^+) = \dot{\theta}(t_k^-) + \Delta\dot{\theta} = \dot{\theta}(t_k^-) + \frac{\Lambda_n}{ml\cos\theta} > \dot{\theta}(t_k^-)$$

et donc, il faut que :

$$\Lambda_n \geq \left(\sqrt{\frac{g}{l\sin\theta}} - \dot{\theta}(t_k^-)\right) ml\cos\theta \tag{B.19}$$

qui n'est pas forcément compatible avec la condition (B.18). En particulier, le choix d'une longueur de barre l suffisamment grande permettrait d'interdire le choix d'une telle solution.

3 Solutions avec $\dot{x}_A(t_k^+) > 0$

Il est immédiat que si $\dot{x}_A(t_k^+) > 0$, alors le système est dans le mode M_{III}. Plus exactement, $\mathcal{B}(\theta,\mu) = \frac{1}{m}(1 + 3\cos\theta(\cos\theta + \mu\sin\theta)) > 0$ et le LCP est bien posé.

4 Solution imposant $\dot{x}_A(t_k^+) = 0$

Nous savons que dans le contact d'un unique contact statique (mode M_{IV} du système hybride), le problème de détermination de la force de contact admet une solution unique et est, par conséquent, bien posé.
De (B.15), on déduit l'expression de l'impulsion normale :

$$\Lambda_n = -\frac{3}{4} m \sin\theta \cos\theta \dot{x}_A(t_k^-)$$

Cette solution correspond aux principes proposés par Baraff [Baraff, 1993].
Notons enfin que cette solution est aussi parfois appelée *solution de dissipation maximale*. En effet, de (B.13), il est immédiat que la dissipation maximale est atteinte pour :

$$\Lambda_n^{opt} = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4} m \sin\theta \cos\theta \dot{x}_A(t_k^-)$$

imposant, d'après (B.15), que $\dot{x}_A^{opt}(t_k^+) = 0$.

Annexe C

Influence de la nature du contact sur l'existence d'inconsistance

1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre 2 consacré à l'exemple de Painlevé que la valeur seuil du coefficient de frottement à partir de laquelle les régions inconsistantes et indéterminées apparaissent est de $\frac{4}{3}$. Il est clair que cette valeur seuil est largement au dessus des coefficients de frottement que l'on rencontre classiquement dans la nature. Le but de cet annexe est d'illustrer sur un exemple simple, similaire à celui de Painlevé, que cette valeur seuil peut être ramenée à des valeurs beaucoup plus réalistes. Dans l'exemple de Painlevé, la trajectoire du centre de gravité G de la barre par rapport au point de contact A demeure sur le cercle de centre A et de rayon l. L'idée que nous avons appliquée consiste à perturber la trajectoire de G par rapport à celle de l'exemple de Painlevé par l'introduction d'un contact rond, modifiant le moment résultant en G de la force de contact.

2 Présentation du modèle

Considérons une barre rigide, mince, homogène et plan de masse m, de longueur $2l$ et d'inertie $I = m\frac{l^2}{3}$ identique à celle de l'exemple de Painlevé. Supposons maintenant que l'on rajoute à chaque extrémité de cette barre une sorte de “chapeau” constitué d'une hémisphère de rayon $r \leq l$, de masse et d'inertie négligeable par rapport à celle de la barre, voir Fig. C.1.
De même que pour l'exemple de Painlevé, soit $G = (x, y)^T$ et $A = (x_A, y_A)^T$ respectivement les coordonnées cartésiennes par rapport à un référentiel galiléen du centre de gravité de la barre et du point de contact A. Le système est paramètré par

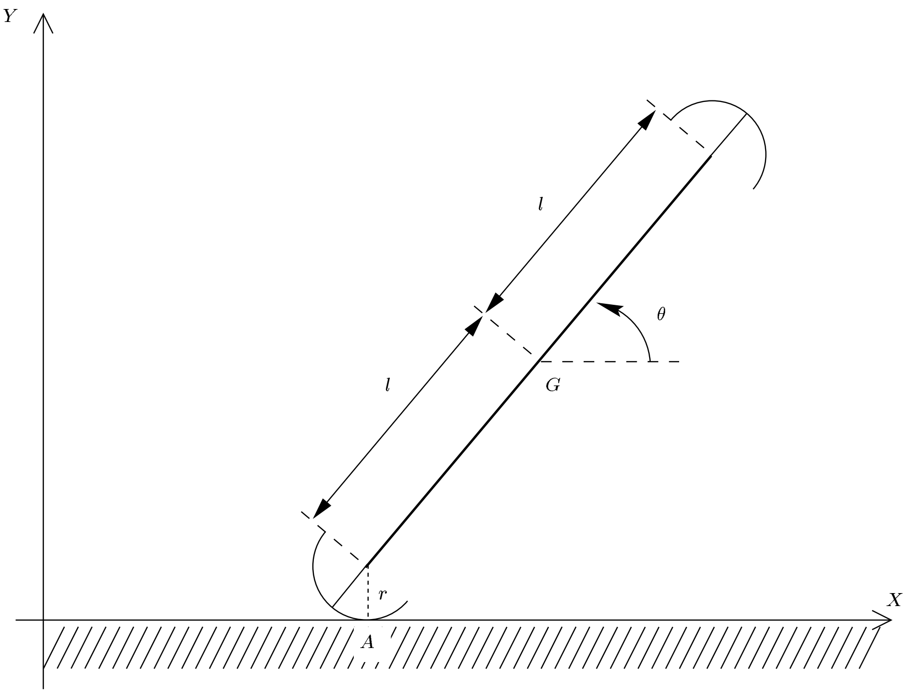

FIG. C.1 – *L'exemple de Painlevé avec un bout rond*

le vecteur des coordonnées généralisées $q = (x, y, \theta)^T$, où θ désigne l'angle (mesuré dans le sens trigonométrique) entre la barre et le sol.

La contrainte unilatérale s'écrit pour ce modèle :

$$F(q) = y_A = y - l\sin\theta - r \geq 0 \tag{C.1}$$

La dynamique générale du système dans le mode de glissement vers la gauche M_{II} est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} m\ddot{x} & = & \mu F_N \\ m\ddot{y} & = & -mg + F_N \\ I\ddot{\theta} & = & (\mu\,(r + l\sin\theta) - l\cos\theta)\,F_N \end{array}\right. \tag{C.2}$$

3 Valeur minimale du coefficient de frottement pour les inconsistances

La relation de complémentarité entre la dérivée seconde par rapport au temps de la distance relative au contact et la force normale au contact s'écrit :

$$\ddot{y}_A = -\mathcal{A}_r + \mathcal{B}_r F_N \geq 0, \;\; F_N \geq 0, \;\; F_N \ddot{y}_A = 0 \tag{C.3}$$

où
$$\mathcal{A}_r(\theta,\dot\theta) = g - l\dot\theta^2 \sin\theta \tag{C.4}$$
et
$$\mathcal{B}_r(\theta,\mu) = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{3}{l}\cos\theta\left(l\cos\theta - \mu\left(r + l\sin\theta\right)\right)\right) \tag{C.5}$$

En comparant avec les expressions de $\mathcal{A}(\theta,\dot\theta)$ et $\mathcal{B}(\theta,\mu)$ données dans (II.5) et (II.6) respectivement, il vient que :

$$\mathcal{A}_r(\theta,\dot\theta) = \mathcal{A}(\theta,\dot\theta) \tag{C.6}$$
$$\mathcal{B}_r(\theta,\mu) = \mathcal{B}(\theta,\mu) - \frac{3r}{ml}\mu\cos\theta \tag{C.7}$$

D'après l'étude que nous avons effectuée sur l'exemple de Painlevé, nous savons que les zones d'inconsistance et d'indétermination apparaissent à partir du moment où $\mathcal{B}_r(\theta,\mu)$ peut s'annuler pour $\theta \in [0,\pi]$.
La figure C.2 trace l'évolution du coefficient de frottement minimum μ_{min} engendrant les inconsistances et indéterminations en fonction de l et r, avec $r \leq l$.
On retrouve bien la valeur seuil $\frac{4}{3}$ de Painlevé lorsque $r \to 0$.
On constate aussi que, comme désiré, μ_{min} prendre des valeurs plus "réalistes".
De (C.7), il vient que μ_{min} est minimum lorsque $r = l$. L'étude facile de $\mathcal{B}(\theta,\mu)$ dans le cas où $r = l$ livre comme valeur seuil minimale pour ce modèle :

$$\mu_{seuil} = 2\frac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{2\sqrt{13}-5}\left(2+\sqrt{13}\right)} \simeq 0.62518255$$

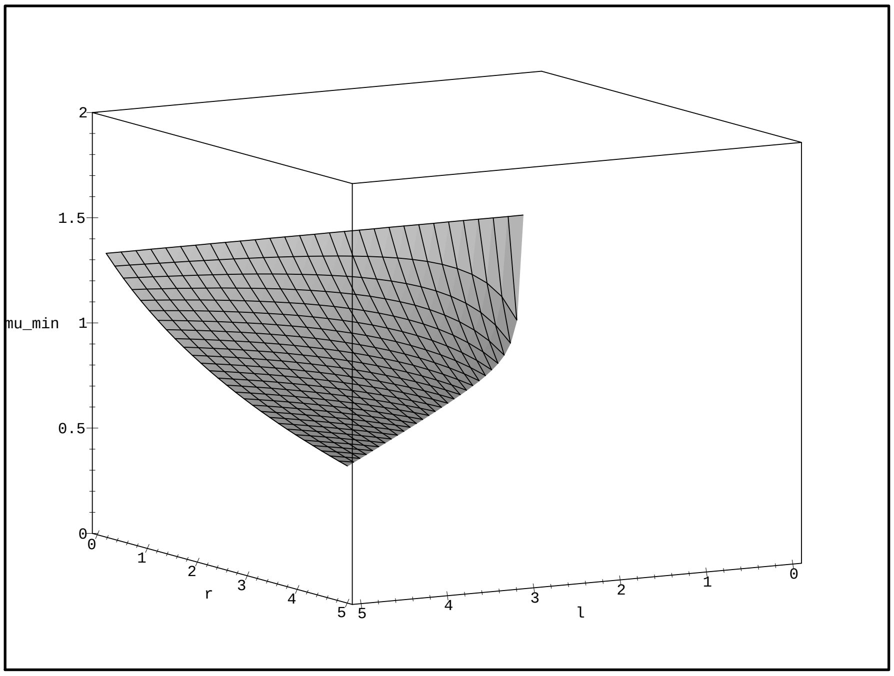

FIG. C.2 – *L'évolution de* μ_{min} *en fonction de* l *et* r

Annexe D

Génération automatique des équations de la dynamique de Lagrange des robots rigides arborescents

1 Motivation

En mécanique, on distingue classiquement deux types d'interaction physique entre les corps rigides. Les corps peuvent être contraints ensemble par un mécanisme ou une articulation ou bien ils peuvent interagir lors de collision ou en s'appuyant les uns sur l'autres.

De ces deux types d'interaction, le premier est le plus simple à modéliser dans le sens où le mouvement global consécutif à une articulation se traduit aisément sous la forme de contraintes holonomes qui peuvent être générées et incorporées automatiquement au niveau de la dynamique : on parle généralement de *contraintes bilatérales* qui se traduisent au niveau géométrique par des contraintes d'égalité. Mathématiquement parlant, l'espace des configurations d'un corps est celui des repères, isomorphes à celui des matrices homogènes 4×4, groupe des déplacements, classiquement noté $SE(3)$, groupe de Lie et variété différentielle de dimension 6. Tout point d'une variété différentielle peut être repéré par un système local de coordonnées, appelé *paramétrisation.* Dans le cas de $SE(3)$, une paramétrisation est obtenue directement en exploitant l'isomorphisme avec $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$, c'est-à-dire en distinguant la translation et la rotation. Dans le cas de n corps rigides indépendants, l'espace de configuration du système est, à priori, $SE(3)^n$, de dimension $6n$. L'introduction de liaisons entre les corps va réduire l'espace de configuration à une variété de dimension inférieure, dont le paramètrage est usuellement appelé *vecteur* *des coordonnées généralisées*, noté $q \in \mathbf{R}^{n_q}$, $n_q \leq n$. Le second type d'interaction traduit le fait que les corps qui constituent le système ne peuvent pas s'interpénétrer et se formule au niveau géométrique par des *contraintes unilatérales* :

$$F(q) \geq 0, \;\; F : \mathbf{R}^{n_q} \rightarrow \mathbf{R}^m$$

Notons ici que le nombre de contraintes de non-pénétration peut être supérieur au nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire $m \geq n_q$.

La dynamique d'un système mécanique de corps rigides soumis à m contraintes unilatérales peut s'écrire sous la forme du système d'équations (Σ) que cela a déjà été présenté dans l'état de l'art :

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = Tu + \nabla F(q)\lambda_n + G_t(q, \dot{q})\lambda_t \tag{D.1}$$

$$\lambda_n^T F(q) = 0, \;\; \lambda_n \geq 0, \;\; F(q) \geq 0 \tag{D.2}$$

$$\text{Loi de restitution + dynamique des chocs} \tag{D.3}$$

$$\text{Modèle de frottement sec d'Amontons-Coulomb} \tag{D.4}$$

q représente ici le vecteur complet des coordonnées généralisées. En d'autres termes n_q correspond au nombre de degré de liberté du système non contraint, c'est-à-dire dans la région $F(q) > 0$. $M(q)$ désigne la matrice d'inertie, $N(q, \dot{q})$ regroupe les termes provenant de la gravité, de la force centrifuge ainsi que de la force de Coriolis, Tu correspond aux actions extérieures. Enfin λ_n et λ_t désignent les composantes normales et tangentielles des forces de contact.

Dans cette formulation, l'intégration de la dynamique afin de simuler de tels systèmes nécessite d'établir les expressions de la matrice d'inertie $M(q)$ et des différents vecteurs $N(q, \dot{q})$, $\nabla F(q)$ et $G(q, \dot{q})$. Une alternative consiste à intégrer numériquement le mouvement de chaque corps de manière séparée puis à projeter la solution sur l'ensemble des contraintes bilatérales comme le propose MEXX ("MEXanical systems eXtrapolation integrator") : cette approche présente certes l'avantage de pouvoir intégrer des chaînes arborescentes longues et compliquées, mais ne permet pas d'avoir accès aux expressions des matrices et vecteurs cités plus haut, qui sont généralement indispensables pour la synthèse de loi de commande. Aussi avons nous opté pour une méthode hors-ligne donnant les expressions générales.
De nombreux logiciels consacrés à la résolution de ces problèmes existent déjà, mais il est déplorer que la plupart ont été développés dans le contexte des robots manipulateurs. Pour ce type de robots, il est supposé qu'une partie de robot, communément appelée *la base*, est rivée au sol. Or les robots marcheurs constituent un classe à part en robotique dans le sens où, durant la locomotion, aucun point du robot ne reste constamment en contact avec le sol (on parle d'alternance des appuis au sol). En conséquence, le vecteur des coordonnées généralisées permettant de décrire un robot

marcheur dans toutes ses phases, y compris la phase de vol (aucune contrainte active), nécessite, par rapport au modèle classique des manipulateurs, d'être augmenté des coordonnées cartésiennes d'un point quelconque lié au robot. Enfin, les robots manipulateurs classiques ne comportent pas de chaînes arborescentes, contrairement aux robots marcheurs constitués généralement d'un tronc autour duquel s'articulent les différents segments (jambes) permettant la locomotion. Aussi nous a-t-il semblé nécessaire de concevoir un logiciel dédié à cette classe particulière de robots.

Nous avons développé un logiciel appelé *RobotDyn* permettant d'obtenir les différents vecteurs et matrices définis plus haut. Il est encapsulé dans le package de Maple[1] ce qui présente l'énorme avantage d'offrir des expressions purement symboliques : en conséquence, les différents problèmes sont résolus pour toutes les grandeurs d'entrées possibles, laissant ainsi tout loisir à l'utilisateur d'expérimenter l'influence des différents paramètres avec des données réelles. Ce logiciel est fortement inspiré du package *Robotica*[2] développé à l'Universté d'Illinois pour les robots manipulateurs.

Robotdyn nécessite une entrée sous forme de table des paramètres Denavit-Hartenberg décrivant le robot à étudier complétée des coordonnées cartésiennes d'un point lié au robot que nous appelerons *base* ; ce point peut-être aussi bien fixe (manipulateur) que mobile (robot marcheur). Une fois cette table lue, *RobotDyn* génére d'abord la cinématique directe du robot. A partir de ces données, la matrice d'inertie, les termes de Coriolis et centrifuges, les symboles de Christoffel ainsi que le vecteur de gravité sont générés. La cinématique directe permet aussi d'obtenir facilement les différents éléments nécessaires au calcul des forces d'interaction avec le sol. Enfin, en tirant profit des routines d'entrées/sorties de Maple, un source fortran optimisé de ces différentes grandeurs peut être obtenu.

2 Extension de la représentation DH aux chaînes arborescentes

Afin de pouvoir prendre en compte des robots à structures arborescentes, comme dans le cas des robots bipèdes constitués de deux jambes et d'un tronc, nous avons étendu la représentation Denavit-Hartenberg aux chaînes arborescentes de la manière suivante.
La représentation DH classique pour une chaîne de n segments successifs [Spong et al., 1989] est donnée par une liste de vecteurs de la forme $\{(a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i)\}_{i=1\ldots n}$ où :

a_i = la distance sur l'axe x_i de o_i au point d'intersection entre les axes x_i et

1. Maple^{TM} is a registered trademark of Waterloo Maple Inc.
2. *Robotica*^{TM} is a trademark of the Board of Trustees of the University of Illinois

z_{i-1},

d_i = la distance sur l'axe z_i de o_{i-1} au point d'intersection entre les axes x_i et x_{i-1} ; d_i est la variable de liaison si l'articulation est prismatique,

α_i = l'angle entre z_{i-1} et z_i suivant x_i,

θ_i = l'angle entre x_{i-1} et x_i suivant z_{i-1} ; θ_i est la variable de liaison si l'articulation est rotoïde.

Cette représentation permet de définir l'attitude du segment i par rapport au repère $i-1$ lié au segment $i-1$.

Afin de prendre en compte les arborescences, il suffit d'introduire un paramètre supplémentaire à chaque vecteur de la liste :

ref_i = le numéro du repère de référence.

Soit (O, x, y, z) un repère cartésien extérieur fixe. Pour l'unité des notations, le repère $(base, x, y, z)$ sera le repère de référence 0.

Exemple
Nous donnons ici un exemple de fichier d'entrée “robot_DH.maple” contenant la liste des paramètres Denavit-Hartenberg d'un robot bipède plan à 3 segments : 2 jambes et un tronc, voir Fig. D.1.

```
#
# ROBOT DENAVIT-HARTENBERG
#
# Representation de Denavit-Hartenberg du robot
# augmentee du parametre ref_i pour traiter les arborescences

# Nombre de segments
NSEG := 3;

# Dimension du vecteur des coordonnees generalisees
NDDL := 5;

# Definition des coordonnees generalisees, vitesses, accelerations
q := vector(NDDL):
qdot := vector(NDDL):

# Definition des differents angles et distances
```

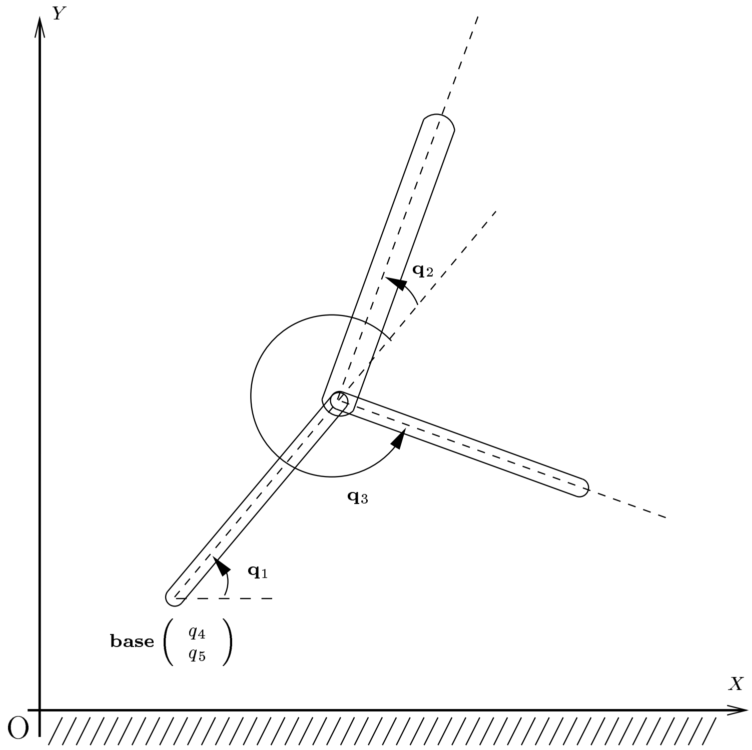

FIG. D.1 – *Modèle du robot marcheur à 3 ddl*

```
# Segment 1
alpha_1 := 0;
theta_1 := q[1];
d_1 := 0;
a_1 := L1;
ref_1 := 0;
type_1 := `REVOLUTE`;

# Segment 2
alpha_2 := 0;
theta_2 := q[2];
d_2 := 0;
a_2 := L2;
ref_2 := 1;
type_2 := `REVOLUTE`;
```

```
# Segment 3
alpha_3 := 0;
theta_3 := q[3];
d_3 := 0;
a_3 := L1;
ref_3 := 1;
type_3 := `REVOLUTE`;

# Coordonnees de la base de reference
base := vector([q[4], q[5], 0]);
```

3 Principe de la génération

3.1 Cinématique directe

La matrice de transformation homogène A_i permettant de passer du repère ref_i au repère i est donnée par :

$$A_i = \begin{pmatrix} R_i & D_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où :

$$R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$$

et :

$$D_i = \begin{pmatrix} a_i\cos\theta_i \\ a_i\sin\theta_i \\ d_i \end{pmatrix}$$

La matrice T_i permettant de passer du repère 0 au repère i est donnée par :

$$T_i = A_i A_{ref_i} A_{ref_{ref_i}} \ldots A_0$$

avec comme convention que $A_0 = Id_{4\times4}$.

La multiplication de plusieurs matrices homogènes étant encore une matrice homogène, on a :

$$T_i = \begin{pmatrix} R_i^c & D_i^c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Dynamique

Nous commençons par donner ici, pour le même robot bipède plan à 3 segments, un exemple de fichier d'entrée “robot_DYNAMIQUE.maple” décrivant les masses, les positions des centres de gravité, ainsi que les inerties par rapport au centre de gravité. La position du centre de gravité et la matrice d'inertie du segment i est donnée dans le repère local (o_i, x_i, y_i, z_i) translaté à l'extrémité du segment et au centre de gravité respectivement.

```
#
# ROBOT DYNAMIQUE
#
# Informations dynamiques des differents segments du robot

# Vecteur gravite
GRAVITE := vector([0, g, 0]);

# Segment 1
masse_1 := m1;
G_1 := vector([-L1/2, 0, 0]);
I_1 := matrix([[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, I1]]);

# Segment 2
masse_2 := m2;
G_2 := vector([-L2/2, 0, 0]);
I_2 := matrix([[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, I2]]);


# Segment 3
masse_3 := m1;
G_3 := vector([-L1/2, 0, 0]);
I_3 := matrix([[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, I1]]);
```

La position des centres de gravité est donnée par :

$$g_i = base + D_i^c + R_i^c G_i$$

La vitesse des centres de masse s'obtient alors par :

$$v_i = J_{v_i} \dot{q}$$

où

$$J_{v_i} = \frac{\partial g_i}{\partial q}$$

Pour les composantes angulaires, soit $z_i = R_i^c k$ où $k = (0,0,1)^T$.
Définissons $J_{\omega_i} \in \mathbf{R}^{3 \times n_q}$ initialisée à zéro comme suit :

$$\forall j = i, ref_i, ref_{ref_i} \ldots \begin{cases} J_{\omega_i}^k = (0,0,0)^T, & \text{si l'articulation } i \text{ est prismatique} \\ J_{\omega_i}^k = z_{ref_j}, & \text{si l'articulation } i \text{ est rotoïde} \end{cases}$$

oú k désigne l'indice de la variable d'articulation j dans le vecteur de coordonnées généralisées q (si q_i est la variable de l'articulation i, pour tout $i = 1 \ldots n$, alors $k = j$).
L'expression de la matrice d'inertie de dimension $n_q \times n_q$ est alors donnée par :

$$M = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T R_i I_i R_i^T J_{\omega_i} \right)$$

D'autre part, écrivons $N(q, \dot{q})$ sous la forme :

$$N(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + G_g(q)$$

La matrice carrée $n_q \times n_q$ contenant les termes de Coriolis et centrifuges est définie par :

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^{n_q} c_{ijk} \dot{q}_i$$

avec les symboles de Christoffel donnés par :

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\}$$

où d_{ij} est l'élément i, j de la matrice d'inertie M.
Enfin les termes du vecteur de gravité s'obtiennent simplement par :

$$G_g = \frac{\partial E_p}{\partial q}$$

où l'énergie potentielle E_p est définie par :

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} m_i g^T x_i$$

3.3 Contraintes de non-pénétration dans le sol

Comme expliqué dans l'introduction, le robot peut être amené, lors de son évolution, à entrer en contact avec son environnement. En particulier, durant la marche des robots bipèdes, on distingue des phases d'appui : la phase de simple support durant laquelle un pied est posé pendant que l'autre évolue au dessus du sol, et la phase de double support pendant laquelle les 2 pieds sont en contact avec le sol. Du point de vue de la dynamique (I.2), il est nécessaire de déterminer les expressions de $\nabla F(q)$ et $G(q, \dot{q})$.

Dans le cas de contacts avec un sol d'équation cartésienne $Y = 0$, ces expressions s'obtiennent directement à partir de la cinématique directe. Les coordonnées cartésiennes des extrémités des différents segments est trivialement données par :

$$o_i(q) = base + D_i^c = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

Il vient pour la composante normale, $y = (y_i)_{i=1,\dots,m}$:

$$\dot{y} = \nabla F^T \dot{q} = \frac{\partial y}{\partial q}\dot{q}$$

et pour la composante tangentielle, $x = (x_i)_{i=1,\dots,m}$:

$$\dot{x} = G^T \dot{q} = \frac{\partial x}{\partial q}\dot{q}$$

Comme présenté dans l'état de l'art, les expressions de la derivée seconde des distances relatives au point de contact sont également nécessaires à l'établissement du LCP permettant le calcul des forces d'interactions λ_n et λ_t :

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \nabla F(q)^T \ddot{q} + f_n(q, \dot{q}, t) \\ \ddot{x} &= G(q)^T \ddot{q} + f_t(q, \dot{q}, t) \end{aligned}$$

où, en posant $z_n = y$ et $z_t = x$, pour $j \in \{n, t\}$:

$$\begin{aligned} f_j(q, \dot{q}, t) &= f_j^1(q, \dot{q}, t) + 2 f_j^2(q, t)\dot{q} + f_j^3(q, t) \\ f_j^1(q, \dot{q}, t) &= \begin{pmatrix} \dot{q}^T W_j^1(q, t)\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T W_j^m(q, t)\dot{q} \end{pmatrix} \\ f_j^2(q, t) &= \frac{\partial^2 z_j}{\partial q \partial t} \\ f_j^3(q, t) &= \frac{\partial^2 z_j}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$W_j^k(q,t)$ désignant le hessien de la k coordonnée de z_j.

4 Exemple d'utilisation du logiciel *Robotdyn*

4.1 Les fichiers d'entrée

L'utilisateur commencera par se créer un répertoire personnel dont il déclarera le chemin d'accès par la variable d'environnement "ROBOTDYN_USER". Il créera aussi deux sous-répertoire, "$ROBOTDYN_USER/spec/" pour y placer les fichiers de description du modèle de robot considéré et "$ROBOTDYN_USER/out/" au cas où il désire obtenir les fonctions fortran des matrices et vecteurs calculés. L'exécution du logiciel *RobotDyn* nécessite la création préalable de trois fichiers qui seront déposés dans le sous-répertoire "$ROBOTDYN_USER/spec/" :

- "robot_DH.maple" : liste des paramètres Denavit-Hartenberg augmentés, dont un exemple a été donné dans la section 2,
- "robot_DYNAMIQUE.maple" : liste des paramètres de masse, d'inertie et de position du centre de gravité,
- "robot_COMPLEMENT.maple" : informations complémentaires,
  - Déclaration de l'entier COMPLEMENT indiquant le nombre d'extrémités (par exemple un talon) n'apparaissant pas dans la représentation DH à prendre en compte au niveau des contraintes de non-pénétration dans le sol. Si COMPLEMENT est non nul, alors doivent suivre dans le format DH identique à celui du fichier "robot_DH.maple" la description des COMPLEMENT extrémités à considérer,
  - Déclaration du booléen EXPORT indiquant si les différentes sorties du logiciel sont à exporter sous forme de fonctions fortran optimisées. Si EXPORT = true, alors les fonctions fortran seront déposées dans le sous-répertoire "$ROBOTDYN_USER/out/", préalablement créé par l'utilisateur.

Une fois que le logiciel Maple a été correctement lancé, l'appel au logiciel *RobotDyn* s'effectue par la commande :

```
read(`robotdyn.maple`);
```

4.2 Exemple de sortie

Nous présentons ici les différentes expressions livrées par le logiciel *RobotDyn* pour l'exemple du robot bipède à 3 segments précdemment décrit.
Le fichier "robot_COMPLEMENT.maple" a été réduit à sa plus simple expression :

```
#
# ROBOT COMPLEMENT
#
# Contient des informations complementaires

COMPLEMENT := 0;

EXPORT := false;
```

L'exécution du logiciel livre alors :

```
                                  MATRICE INERTIE :
M[1,1] = (cos(q[3])+3/2)*L1^2*m1+(1/4*L2^2+L2*cos(q[2])*L1+L1^2)*m2+I2+2*I1
M[1,2] = (1/2*L2*cos(q[2])*L1+1/4*L2^2)*m2+I2
M[1,3] = (1/2*cos(q[3])+1/4)*L1^2*m1+I1
M[1,4] = (-3/2*sin(q[1])-1/2*sin(q[1]+q[3]))*L1*m1+(-1/2*L2*sin(q[1]+q[2])-
L1*sin(q[1]))*m2
M[1,5] = (3/2*cos(q[1])+1/2*cos(q[1]+q[3]))*L1*m1+(1/2*L2*cos(q[1]+q[2])+
L1*cos(q[1]))*m2
M[2,1] = (1/2*L2*cos(q[2])*L1+1/4*L2^2)*m2+I2
M[2,2] = 1/4*m2*L2^2+I2
M[2,3] = 0
M[2,4] = -1/2*m2*L2*sin(q[1]+q[2])
M[2,5] = 1/2*m2*L2*cos(q[1]+q[2])
M[3,1] = (1/2*cos(q[3])+1/4)*L1^2*m1+I1
M[3,2] = 0
M[3,3] = 1/4*m1*L1^2+I1
M[3,4] = -1/2*m1*L1*sin(q[1]+q[3])
M[3,5] = 1/2*m1*L1*cos(q[1]+q[3])
M[4,1] = (-3/2*sin(q[1])-1/2*sin(q[1]+q[3]))*L1*m1+(-1/2*L2*sin(q[1]+q[2])-
L1*sin(q[1]))*m2
M[4,2] = -1/2*m2*L2*sin(q[1]+q[2])
M[4,3] = -1/2*m1*L1*sin(q[1]+q[3])
M[4,4] = 2*m1+m2
M[4,5] = 0
M[5,1] = (3/2*cos(q[1])+1/2*cos(q[1]+q[3]))*L1*m1+(1/2*L2*cos(q[1]+q[2])+
L1*cos(q[1]))*m2
M[5,2] = 1/2*m2*L2*cos(q[1]+q[2])
M[5,3] = 1/2*m1*L1*cos(q[1]+q[3])
M[5,4] = 0
M[5,5] = 2*m1+m2
```

```
                    MATRICE CORIOLIS / CENTRIFUGE :
C[1,1] = -1/2*m2*qdot[2]*L2*sin(q[2])*L1-1/2*m1*qdot[3]*L1^2*sin(q[3])
C[1,2] = (-1/2*sin(q[2])*qdot[1]-1/2*qdot[2]*sin(q[2]))*L2*L1*m2
C[1,3] = (-1/2*qdot[1]*sin(q[3])-1/2*qdot[3]*sin(q[3]))*L1^2*m1
C[1,4] = 0
C[1,5] = 0
C[2,1] = 1/2*m2*L2*sin(q[2])*L1*qdot[1]
C[2,2] = 0
C[2,3] = 0
C[2,4] = 0
C[2,5] = 0
C[3,1] = 1/2*m1*qdot[1]*L1^2*sin(q[3])
C[3,2] = 0
C[3,3] = 0
C[3,4] = 0
C[3,5] = 0
C[4,1] = (-1/2*qdot[1]*cos(q[1]+q[3])-3/2*qdot[1]*cos(q[1])-1/2*qdot[3]*
cos(q[1]+q[3]))*L1*m1+(-qdot[1]*L1*cos(q[1])+(-1/2*qdot[2]*cos(q[1]+q[2])-
1/2*qdot[1]*cos(q[1]+q[2]))*L2)*m2
C[4,2] = (-1/2*qdot[2]*cos(q[1]+q[2])-1/2*qdot[1]*cos(q[1]+q[2]))*L2*m2
C[4,3] = (-1/2*qdot[1]*cos(q[1]+q[3])-1/2*qdot[3]*cos(q[1]+q[3]))*L1*m1
C[4,4] = 0
C[4,5] = 0
C[5,1] = (-1/2*qdot[1]*sin(q[1]+q[3])-3/2*qdot[1]*sin(q[1])-1/2*qdot[3]*
sin(q[1]+q[3]))*L1*m1+(-qdot[1]*L1*sin(q[1])+(-1/2*qdot[2]*sin(q[1]+q[2])-
1/2*qdot[1]*sin(q[1]+q[2]))*L2)*m2
C[5,2] = (-1/2*qdot[2]*sin(q[1]+q[2])-1/2*qdot[1]*sin(q[1]+q[2]))*L2*m2
C[5,3] = (-1/2*qdot[1]*sin(q[1]+q[3])-1/2*qdot[3]*sin(q[1]+q[3]))*L1*m1
C[5,4] = 0
C[5,5] = 0


                         VECTEUR GRAVITE :
G[1] = ((3/2*cos(q[1])+1/2*cos(q[1]+q[3]))*L1*m1+(1/2*L2*cos(q[1]+q[2])+
L1*cos(q[1]))*m2)*g
G[2] = 1/2*m2*g*L2*cos(q[1]+q[2])
G[3] = 1/2*m1*g*L1*cos(q[1]+q[3])
G[4] = 0
G[5] = (2*m1+m2)*g
```

```
                         COORDONNEES DES EXTREMITES :
Extremite 1 :
X1 = q[4]
Y1 = q[5]



Extremite 2 :
X2 = q[4]+L1*cos(q[1])
Y2 = q[5]+L1*sin(q[1])



Extremite 3 :
X3 = q[4]+L2*cos(q[1]+q[2])+L1*cos(q[1])
Y3 = q[5]+L2*sin(q[1]+q[2])+L1*sin(q[1])



Extremite 4 :
X4 = (cos(q[1]+q[3])+cos(q[1]))*L1+q[4]
Y4 = (sin(q[1]+q[3])+sin(q[1]))*L1+q[5]
```

5 Conclusion

Le tableau D.1 donne la liste des variables principales affectées à l'issue de l'exécution du logiciel.
Certaines variables supplémentaires correspondent à des expressions optimisées de variables du tableau D.1. Leurs noms sont les mêmes que ceux des variables auquelles elles se réfèrent augmentés du préfixe "OPT_" (exemple OPT_MATRICE_INERTIE). Elles ont été générées par appel à la fonction *myoptimisation*.

Exemple

```
OPT_MATRICE_INERTIE := myoptimization(MATRICE_INERTIE):
```

L'exportation est effectuée par le biais de la procédure *maple2scilab*. La variable globale "modele" contient tous les paramètres variables des masses, longueurs, inerties du robot.

Nom	**Dimension**	**Signification**	**Fichiers de sortie**
CIN_DIR	EXTREMITES×3	coordonnées des extrémités	cd_m.{f,sci}
CORIOLIS	NDDL×NDDL	termes de Coriolis/centrifuges C	c_m.{f,sci}
ENERGIE_CINETIQUE	1	énergie cinétique	
ENERGIE_POTENTIELLE	1	énergie potentielle	ep_m.{f,sci}
EXTREMITES	1	NSEG+COMPLEMENT+1	
liste_gravite	liste	composantes variables de GRAVITE	
liste_inertie	liste	inerties variables	
liste_longueur	liste	longueurs variables	
liste_masse	liste	masses variables	
MATRICE_INERTIE	NDDL × NDDL	matrice d'inertie M	m_m.{f,sci}
VEC_GRAVITE	NDDL×1	vecteur gravité G_g	g_m.{f,sci}
G_N	EXTREMITES×1	y	gn_m.{f,sci}
G_T	EXTREMITES×1	x	gt_m.{f,sci}
W_N	NDDL×EXTREMITES	∇F	wn_m.{f,sci}
W_T	NDDL×EXTREMITES	G	wt_m.{f,sci}
W_N_TILDE	EXTREMITES×1	f_n^3	wnt_m.{f,sci}
W_T_TILDE	EXTREMITES×1	f_t^3	wtt_m.{f,sci}
W_N_BAR	EXTREMITES×1	$f_n^1 + 2f_n^2\dot{q}$	wnb_m.{f,sci}
W_T_BAR	EXTREMITES×1	$f_t^1 + 2f_t^2\dot{q}$	wtb_m.{f,sci}

TAB. D.1 – *Variables déclarées en fin d'exécution*

Exemple

```
args := [q, modele]:
maple2scilab(‘cd_m‘, OPT_CIN_DIR, args):
unassign(’args’):
```

crée deux fichiers :

- "cd_m.f" : fichier fortran,
- "cd_m.sci" : fichier de déclaration d'external pour scilab.

Enfin l'utilisateur intéressé trouvera des informations commentaires à l'intérieur du source commenté constitué des cinq fichiers :

- "global.maple"
- "cinematique_directe.maple"
- "contraintes_unilaterales.maple"
- "dynamique_lagrange.maple"
- "robotdyn.maple"